V **Příkladu 17.19** je nalezen charakteristický polynom matice A, vlastní čísla a příslušné vlastní vektory, a rovněž minimální polynom matice A. V následující části je využita Věta 17.18 (vynechali jsme ji, ale její tvrzení i důkaz jsou velmi snadné), podle níž není třeba nic počítat, pokud známe vlastní čísla a vlastní vektory matice A. Můžete však vyhledat předchozím postupem charakteristický polynom matice A^3, resp. A^{-1}, její vlastní čísla a příslušné vlastní vektory a přesvědčit se, že dojdeme ke stejnému výsledku.

Ve třetí části Příkladu 17.19 je ukázáno, jak je možno znalost minimálního polynomu matice A využít k nalezení inverzní matice k matici A. Totéž platí pro jakékoli mocniny matice A, kladné i záporné. Důsledkem je zjištění, že všechny mocniny této matice A tvoří v prostoru $\mathbb{R}^{3\times 3}$, který má dimezi 9, podprostor dimenze 3, který je generován maticemi E, A a A^2.

Poznámka. Při hlubším studiu lineární algebry a řady jejích aplikací hrají vlastní čísla matic a příslušné vlastní vektory mimořádně důležitou roli. V astronomii (pohyb planet) např. sehrála důležitou roli věta o reálnosti vlastních čísel reálné symetrické matice. Jordanův kanonický tvar se užívá například v teorii řešení soustav lineárních diferenciálních rovnic (viz 20. kapitola, kterou vynecháváme, snad se dozvíte něco v přednáškách z analýzy). V geometrii poznáte užitečné souvislosti v tématech o kuželosečkách a kvadrikách.

Poznámka k Větě 17.22. V úvodním povídání o motivaci k 17. a 18. kapitole (viz LA-II 3. týden) jsme zjistili, že „ošklivou“ matici endomorfismu můžeme nahradit „krásnou“ diagonální maticí, když budeme mít k disposici dostatečné množství vlastních čísel a vlastních vektorů.

Je-li A matice endomorfismu f na prostoru V dimenze n, má matice A řád n. Pokud najdeme n navzájem různých vlastních čísel, vyplývá z věty 17.22, že jsou příslušné vlastní vektory lineárně nezávislé a tvoří tedy bázi prostoru V, vzhledem k níž má endomorfismus f diagonální matici (na diagonále jsou všechna vlastní čísla). Matice A je v tomto případě diagonalizovatelná.

Může se stát, že například pro $n = 3$ najdeme jedno dvojnásobné vlastní číslo, k němuž existuje podprostor vlastních vektorů dimenze dva (generovaný dvěma lineárně nezávislými vektory), a druhé vlastní číslo jednoduché. Podle Věty 17.22 stačí vzít dva lineárně nezávislé vlastní vektory k prvnímu vlastnímu číslu a jeden vlastní vektor příslušný ke druhému vlastnímu číslu a máme bázi prostoru V – vzhledem k ní má endomorfismus f diagonální matici. Matice A je diagonalizovatelná. Pokud však k dvojnásobnému vlastnímu číslu existuje jen jednodimenzionální prostor vlastních čísel, máme vlastních vektorů málo a endomorfismus f nemá diagonální matici. Matice A v tomto případě diagonalizovatelná není, má však Jordanův kanonický tvar.

Kvůli zjednodušení výkladu jsme vynechali celou 16. kapitolu. Proto jsme se museli vyhnout některým pojmům, jedním z nich je právě *invariantní polynom.* K hlubšímu pochopení by bylo třeba nastudovat téměř celou 16. kapitolu.

Z **Příkladu 18.6** jsem doporučil ke studiu jen prostřední část: Jsou-li matice A a B podobné, je $CA = BC$. Rozepíšeme-li tento vztah do složek, dostaneme soustavu čtyř rovnic atd. A dospějeme k maticím C a C^{-1}. Zbytek příkladu vynecháme.

V důkazu **Věty 18.9** se snadno (podle definice) vypočte charakteristický polynom $(\lambda - a)^n$ Jordanovy buňky řádu n. Minimální polynom zjistíme jednoduše tak, že si uvědomíme, že polynom $(\lambda - a)^{n-1}$ není anulující (dosadíme Jordanovu buňku do tohoto polynomu a nedostaneme nulovou matici), a proto je minimální polynom roven charakteristickému. Tím se vyhneme pojmu invariantní polynom.

Jako cvičení je dobré si vzít například Jordanovu buňku pátého řádu s prvkem a na diagonále a dosadit ji do polynomu $(\lambda - a)^4$. Zjistíme, že dostaneme nenulovou matici, takže polynom $(\lambda - a)^4$ není anulující.

$$J = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}, \qquad J - aE = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (J - aE)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(J - aE)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (J - aE)^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

17. dubna 2021