1. Určete (a dokažte!) jaké množině se rovnají tyto průniky:
   a) $\bigcap_{n=1}^{\infty}(-2-\frac{1}{n^2},0)$, b) $\bigcap_{n=1}^{\infty}[-n,\frac{n}{n+1})$, c) $\bigcap_{n=2}^{\infty}(-n,\frac{n}{n-1}]$, d) $\bigcap_{n=1}^{\infty}(\{n\}\cup[100-n,101-n])$

2. Nechť
$$M=\{x\in\mathbb{R};\ 2\le x^2<16x\}.$$
   Určete $\sup M$, $\inf M$, $\max M$ a $\min M$ (nemusíte ověřovat).

3. Buď
$$S=\left\{(1+\cos(n\pi))\frac{n^2}{n^2+2n-1};\ n\in\mathbb{N}\right\}.$$
   Dokažte, že $\sup S=2$.

Náznak řešení.

1b) První interval je obsažen ve všech dalších...

1c) Posloupnost $\frac{n}{n-1}$ je klesající a konverguje k 1, takže by mělo vyjít $(-2,1]$. Ověřme. Zřejmě $-n\le-2<1<\frac{n}{n-1}$, takže $(-2,1]\subset(-n,\frac{n}{n-1}]$ pro všechny $n\ge2$. Obrácená inkluze: Nechť x patří do každé množin z průniku a pro spor, nechť $x\le-2$ nebo $x>1$. V prvním případě x nepatří do prvního intervalu a tudíž ani do průniku, což je spor. V druhém případě potřebuji najít $n\in\mathbb{N}$, aby $\frac{n}{n-1}<x$. To vede na podmínku $n>\frac{x}{x-1}$, takže např. pro číslo $k:=\left[\frac{x}{x-1}\right]+1\in\mathbb{N}$ platí, že $x\notin(-k,\frac{k}{k-1}]$, což je opět spor.

2) Stačí rozšifrovat definici množiny, tj. vyřešit nerovnice. Podobné příklady si snadno vytvoříte sami - použijte k tomu vaše nej(ne)oblíbenější funkce.

3) Posloupnost $1+\cos n\pi$ osciluje mezi 0 a 2. Posloupnost $\frac{n^2}{n^2+2n-1}$ je rostoucí a konverguje k 1. Podle jedné z definic suprema, pro libovolné $\varepsilon>0$ potřebujeme najít $n_0\in\mathbb{N}$ tak, aby platilo
$$a_{n_0}>2-\varepsilon.$$
To nelze, pokud člen $1+\cos(\pi n_0)$ je nula, takže n_0 musí být sudé. Potom potřebujeme zaručit platnost nerovnosti
$$\frac{2n_0^2}{n_0^2+2n_0-1}>2-\varepsilon.$$
Takže můžeme vyřešit nerovnost vzhledem k n_0. Pamatujte ale, že stačí odhad, takže pokud se nabízí nějaké zjednodušení tím, že nějaký zanedbatelný člen vynecháte nebo přidáte (tak aby se zachoval směr nerovností), je dobré to udělat. Zde se nabízí použít
$$\frac{2n_0^2}{n_0^2+2n_0-1}>\frac{2n_0^2}{n_0^2+2n_0+1}=2\left(\frac{n_0}{n_0+1}\right)^2=2\left(1-\frac{1}{n_0+1}\right)^2.$$
Takže postačuje vyřešit nerovnost
$$2\left(1-\frac{1}{n_0+1}\right)^2>2-\varepsilon,$$
která už je snadná.