1. Test 06/07 zimní semestr [1]

Příklad 1. *Najděte všechna řešení následující soustavy rovnic nad tělesem* $\mathbb{Z}_7$*:*

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & 1 & 5 & 2 & 6 & 4 \\ 3 & 6 & 3 & 0 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Řešení. Gaussovou eliminací převedeme danou soustavu na ekvivalentní soustavu v odstupňovaném tvaru:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & 1 & 5 & 2 & 6 & 4 \\ 3 & 6 & 3 & 0 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & 1 & 5 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & 1 & 5 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

V prvním kroku jsme přičetli 1. řádek k 2. řádku a 4-násobek 1. řádku k 3. řádku. V druhém kroku jsme přičetli (-1)-násobek (= 6-násobek) 1. řádku k 3. řádku. Ve třetím kroku jsme vynásobili 1. řádek číslem 2 (to není nutné, jen si trochu zjednodušíme počítání řešení).

Neznámé si označíme pořadě a, b, c, d, e. Pivoty jsou v sloupcích odpovídajících proměnným a, c a e. Proměnné b,d jsou tedy parametry.

Vypočteme partikulární (tj. libovolné) řešení naší soustavy: Zvolíme např. $b = d = 0$. Ze třetí rovnice dostáváme $e = 3$, z druhé rovnice $c + 2d + 3e = 2$, tedy po dosazení $d = 0$, $e = 3$ máme $c = 0$. Z první rovnice spočteme $a = 0$. Partikulárním řešením je např. vektor

$$(0, 0, 0, 0, 3).$$

Zbývá určit nějakou bázi prostoru všech řešení příslušné homogenní soustavy

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Volbou $b = 0, d = 1$ dostáváme řešení $(2, 0, 5, 1, 0)$. Volbou $b = 1, d = 0$ dostáváme řešení $(5, 1, 0, 0, 0)$. Množina všech řešení homogenní soustavy je $\langle(2, 0, 5, 1, 0), (5, 1, 0, 0, 0)\rangle$.

[1] Omluvte slabou sazbu. Nemám českou variantu TEXu, takže diakritika vypadá všelijak, dělení slov je často chybné, apod. Náměty na zlepšení, nejasnosti apod. pošlete třeba na email a nebojte se na cokoliv zeptat při cvičeních!

Množina všech řešení soustavy je

$$(0,0,0,0,3) + \langle (2,0,5,1,0), (5,1,0,0,0) \rangle.$$

Poznámky.

- Při určování báze řešení homogenní soustavy zapomněli někteří "vynulovat pravou stranu".
- Výsledek někdy vypadal např. takto

  $$(0,0,0,0,3) + \langle (2,0,5,1,0), (5,1,0,0,0), (0,1,5,1,0) \rangle.$$

  To je sice pravda, ale jeden vektor lze vynechat, proto nebyla řešení uznána jako správná (např. vektor $(0,1,5,1,0)$ (řešení pro volbu $b=1, d=1$) je součtem řešení $(2,0,5,1,0)$ (volba $b=0, d=1$) a $(5,1,0,0,0)$ (volba $b=1, d=0$).
- Lze postupovat i tak, že nejprve vyjádříme proměnné v závislosti na parametrech: $e=3$, $c=2+5d+4e=5d$, $a=1+5b+4c+3d+2e=5b+2d$. Množina všech řešení je

  $$\{(5b+2d, b, 5d, d, 3); b, d \in \mathbb{Z}_7\} =$$
  $$= \{(0,0,0,0,3) + b(5,1,0,0,0) + d(2,0,5,1,0); b, d \in \mathbb{Z}_7\} =$$
  $$= (0,0,0,0,3) + \langle (5,1,0,0,0), (2,0,5,1,0) \rangle.$$

  To je ale pracnější. **Je potřeba, abyste uměli řešit soustavy rovnic postupem ve vzorovém řešení!!!**
- Vektory v některých řešeních měly dokonce špatný počet složek. Výsledkem byl např. vektor z prostoru $\mathbb{Z}_7^3$.

Příklad 2. *Máme dánu matici A nad tělesem $\mathbb{Z}_5$. Najděte A^{-1} (pokud existuje).*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení. Inverzní matici spočteme metodou $(A|E) \sim \ldots \sim (E|A^{-1})$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

Takže

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Poznámky. Někdo použil metodu $(E|A) \sim (A^{-1}|E)$. To je také možné (rozmyslete si proč).

Příklad 3. *Pro která reálná čísla a jsou vektory $(a, -4, -1)$, $(4, -6, -3)$, $(1, 1, -a)$ vektorového prostoru $\mathbb{R}^3_3$ lineárně nezávislé?*

Řešení. Elementární úpravy matice nemění lineární (ne)závislost řádků. Napíšeme si tedy dané vektory do řádků a převedeme vzniklou matici na odstupňovaný tvar. Z odstupňovaného tvaru snadno rozhodneme o lineární (ne)závislosti: Řádky matice v odstupňovaném tvaru jsou lineárně závislé, právě když matice obsahuje nulový řádek.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -a \\ 4 & -6 & -3 \\ a & -4 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -a \\ 0 & -10 & -3+4a \\ 0 & -4-a & -1+a^2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -a \\ 0 & -10 & -3+4a \\ 0 & 40+10a & 10-10a^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -a \\ 0 & -10 & -3+4a \\ 0 & 0 & -6a^2+13a-2 \end{pmatrix}.$$

(V poslední úpravě jsme přičetli $(4+a)$-násobek 2. řádku k 3. řadku.) Všimneme si, že pro libovolné a je poslední matice v odstupňovaném tvaru. Nulový řádek obsahuje, právě když $-6a^2 + 13a - 2 = 0$, což se stane, právě když $a = \frac{1}{6}$ nebo $a = 2$ (řešení kvadratické rovnice). Tedy dané vektory jsou lineárně nezávislé, právě když $a \neq 2$ a $a \neq \frac{1}{6}$.

Jiné řešení. Podle definice jsou dané vektory lineárně nezávislé, právě když rovnice

$$x \cdot (1, 1, -a) + y \cdot (4, -6, -3) + z \cdot (a, -4, -1) = (0, 0, 0)$$

má netriviální řešení (t.j. jiné řešení než očividné $x = y = z = 0$). Rozepsáním do složek dostáváme homogenní soustavu, kterou upravíme Gaussovou eliminací.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & a \\ 1 & -6 & -4 \\ -a & -3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & a \\ 0 & -10 & -4-a \\ 0 & -3+4a & a^2-1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & a \\ 0 & -10 & -4-a \\ 0 & -30+40a & 10a^2-10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & a \\ 0 & -10 & -4-a \\ 0 & 0 & 6a^2-13a+2 \end{pmatrix}$$

(V poslední úpravě jsme přičetli $(-3+4a)$-násobek 2. řádku k 3. řádku.) Všimneme si, že poslední matice je v odstupňovaném tvaru pro libovolné a. Je zřejmé, že homogenní soustava rovnic v odstupňovaném tvaru má netriviální řešení, právě když obsahuje volnou proměnnou (parametr). To se v našem případě stane, právě když $6a^2 - 13a + 2 = 0$. Dostáváme stejný výsledek jako v předchozím řešení.

Ještě jiné řešení. Daná množina vektorů je LZ, právě když determinant libovolné matice výše je nulový. Toto jsme ještě na cvičení neprobírali.

Poznámky. Tento příklad dělal největší problémy (dle očekávání)

- Tvrzení "Jsou-li $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ LN, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3$ LN a $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ LN, pak jsou $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ LN" rozhodně **NEPLATÍ !!!!**. Např. vektory $(1,0), (0,1), (1,1)$ v $\mathbb{R}^2$.
- Násobení řádku nulou není (většinou) ekvivalentní úprava!!! Tedy pokud násobíme číslem např. $4a-3$, musíme dát pozor na případ $a = \frac{3}{4}$. Je rozdíl mezi těmito úpravami:
  - Vynásobit 1. řádek a a potom přičíst k 2. řádku.
  - Přičíst a-násobek 1. řádku k 2. řádku.

  První úprava nemusí být ekvivalentní pro $a = 0$, druhá je vždy. Navíc první úprava většinou matici "zkomplikuje".
- Uvažujme matici

$$\begin{pmatrix} a & 5 & -6 \\ 0 & 3a-4 & 20 \\ 0 & 0 & a^2-13a+\pi \end{pmatrix}$$

  Není pravda, že řádky této matice jsou LN, právě když $a^2 - 13a + \pi = 0$!!!! Pro $a = 0$ i $a = \frac{4}{3}$ jsou řádky LZ! Důvod je ten, že např. pro $a = 0$ není matice v odstupňovaném tvaru, tedy o lineární nezávislosti nelze soudit z absence nulového řádku.
- Někde chyběla odpověď na položenou otázku. To je zejména u zmatenějších řešení často rozhodující vada.

Příklad 4. *Vypočtěte n-tou mocninu (n je přirozené číslo) reálné matice A.*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Řešení. Spočteme prvních několik mocnin:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A^4 = A \cdot A^3 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^5 = A \cdot A^4 = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -10 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Odhadneme výsledek:

$$A^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^{n+1}n & (-1)^n\binom{n}{2} \\ 0 & (-1)^n & (-1)^{n+1}n \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$$

a dokážeme indukcí podle n (tvrzení, které dokazujeme, je: Pro každé přirozené n platí vztah $A^n = \ldots$). Pro $n = 1$ tvrzení platí. Nyní předpokládáme, že platí pro n. Máme

$$A^{n+1} = A \cdot A^n = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^{n+1}n & (-1)^n\binom{n}{2} \\ 0 & (-1)^n & (-1)^{n+1}n \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (-1)\cdot(-1)^n & (-1)\cdot(-1)^{n+1}n + (-1)^n & (-1)\cdot(-1)^n\binom{n}{2} + (-1)^{n+1}n \\ 0 & (-1)\cdot(-1)^n & (-1)\cdot(-1)^{n+1}n + (-1)^n \\ 0 & 0 & (-1)\cdot(-1)^n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (-1)^{n+1} & (-1)^{n+2}(n+1) & (-1)^{n+1}\binom{n+1}{2} \\ 0 & (-1)^{n+1} & (-1)^{n+2}(n+1) \\ 0 & 0 & (-1)^{n+1} \end{pmatrix},$$

kde při výpočtu prvku na místě 13 jsme použili vztah $\binom{n}{2} + n = \binom{n+1}{2}$. Tvrzení tedy platí i pro $n + 1$ a důkaz indukcí je hotov.

Poznámky.

- $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.
- $(-1)^n = (-1)^{n+2}$ (v některých řešeních se vyskytl výraz na pravé straně, což věci ubírá na kráse).
- Součet aritmetické řady $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ je $\binom{n+1}{2}$ (viz učebnice pro základní školy).

Příklad 5. *Jsou dány permutace $\pi, \rho \in S_8$. Vyjádřete permutaci $\rho^{-1}\pi$ rozkladem na nezávislé cykly a spočítejte znaménka permutací $\pi, \rho, \rho^{-1}\pi$.*

Řešení. V zápisu pomocí rozkladu na nezávislé cykly je

$$\begin{aligned} \pi &= (1\ 7\ 5\ 6\ 3\ 4), \\ \rho = \rho^{-1} &= (1\ 3)(2\ 5)(4\ 6), \\ \rho^{-1}\pi &= (1\ 7\ 2\ 5\ 4\ 3\ 6). \end{aligned}$$

Parita permutace je rovná paritě počtu cyklů sudé délky (v zápisu pomocí nezávislých cyklů). Tedy permutace π je lichá (jeden cyklus sudé délky), ρ je lichá (tři cykly liché délky) a $\rho^{-1}\pi$ je sudá (žádný cyklus sudé délky).

Poznámky.

- Pozor na pořadí při skládání!
- Výpočet rozkladem na transpozice je zdlouhavý.
- Výpočet pomocí počtu inverzí je zdlouhavý.
- Počet inverzí permutace $(1, 2, 3, 4)$ je 3 nikoliv 0, jak by se mohlo zdát z následujícího chybného postupu: počet čísel napravo od 1 menších než 1 je 0, počet čísel napravo od 2 menších než 2 je 0, $\dots$. Tento postup můžeme použít, pouze máme-li permutaci zapsanou tabulkou.
- Znaménko složené permutace je součin znamének jednotlivých permutací. Toto u některých řešení neplatilo.

Příklad 6. *Jsou dány vektory* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \in \mathbb{Z}_3^3$*:*

$$\mathbf{v}_1 = (1, 2, 0),\ \ \mathbf{v}_2 = (2, 2, 0),\ \ \mathbf{v}_3 = (1, 2, 2),\ \ \mathbf{v}_4 = (0, 1, 2).$$

- *Vyjádřete vektory* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ *jako lineární kombinaci vektorů* $\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ *(pokud to jde).*
- *Určete nějaké báze a dimenze prostorů* $\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \rangle$*,* $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \rangle$*,* $\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \rangle$*,* $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \rangle$*.*

Řešení. Chceme najít $k, l \in \mathbb{Z}_3$ tak, aby $\mathbf{v}_1 = k\mathbf{v}_3 + l\mathbf{v}_4$, a podobně pro vektor $\mathbf{v}_2$. Rozepsáním do složek dostaneme dvě soustavy rovnic, které se liší pouze pravou stranou. Vyřešíme je proto současně:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Rovnice $\mathbf{v}_1 = k\mathbf{v}_3 + l\mathbf{v}_4$ tedy nemá řešení, tj. $\mathbf{v}_1$ nelze vyjádřit jako lineární kombinace vektorů $\mathbf{v}_3$ a $\mathbf{v}_4$. Rovnice $\mathbf{v}_2 = k\mathbf{v}_3 + l\mathbf{v}_4$ má (jedno) řešení $k = 2, l = 1$. Tedy

$$\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4.$$

K rychlému určení báze se hodí následující jednoduché pozorování: Vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ jsou lineárně nezávislé, právě když, pro každé $i = 1 \dots k$, vektor $\mathbf{u}_i$ nelze vyjádřit jako lineární kombinace předchozích vektorů $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{i-1}$. Dobře si rozmyslete jemný rozdíl mezi definicí lineární nezávislosti a tímto tvrzením. Důkaz si snadno uděláte sami, případně můžete nahlédnout do skript doc. Tůmy (kapitola lineární nezávislost).

Zpět k řešení. Vektor $\mathbf{v}_3$ je nenulový a vektor $\mathbf{v}_4$ není násobkem vektoru $\mathbf{v}_3$. Podle předchozího tvrzení je množina $\{\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ lineárně nezávislá a samozřejmě generuje $\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \rangle$. Tedy

$$\text{Báze } \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \rangle \text{ je např. } \{\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}, \text{ dimenze je 2.}$$

(Připomenutí: báze je lineárně nezávislá množina generátorů, všechny báze mají stejný počet prvků, tento počet se nazývá dimenze.)

Zjistili jsme, že $\mathbf{v}_2 \in \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \rangle$, tj. $\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \rangle = \langle \mathbf{v_3}, \mathbf{v_4} \rangle$, tj.

$$\text{Báze } \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \rangle \text{ je např. } \{\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}, \text{ dimenze je 2.}$$

Zjistili jsme, že $\mathbf{v}_1$ není lineární kombinací $\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$. Podle pozorování výše je tedy $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ lineárně nezávislá.

$$\text{Báze } \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \rangle \text{ je např. } \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}, \text{ dimenze je 3.}$$

Je dobré si uvědomit, že libovolný podprostor dimenze n v prostoru dimenze n je celý prostor. V našem případě máme $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \rangle = \mathbb{Z}_3^3$. Tedy jiný příklad báze $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \rangle$ je $\{(0,0,1), (0,1,0), (1,0,0)\}$.

Zřejmě $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \rangle$, tedy

$$\text{Báze } \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \rangle \text{ je např. } \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}, \text{ dimenze je 3.}$$

Poznámky.

- Je potřeba (hlavně při zkoušce) znát základní pojmy: vektorový prostor, LN a LZ množina, množina generátorů, báze, dimenze. Odpověď na druhou otázku "dimenze všech prostorů je 3, protože vektory mají tři složky" je chybná.
- Odpověď

  $$\text{Báze je } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

  je nesmyslná. Báze není matice. Správně by bylo např.: Bázi tvoří řádky následující matice .... Nebo ještě lépe: Báze je $\{(1,1,1), (0,2,1)\}$ (složené závorky nejsou nutné, báze se někdy definuje jako posloupnost vektorů (p. Tůma), někdy jako množina (p. Bican)).
- Využití eliminace pro určení báze lineárního obalu vektorů zde bylo sice zbytečné, nicméně je správné, tedy chválím.
- Řada lidí mlčky používala tvrzení uvedené v řešení. Mlčky jsem předpokládal, že si to dotyční uvědomili (i když trochu pochybuji).