Polární báze bilineárních forem

1. verze ze dne: 7.4.2005

Toto je pracovní, neúplná verze, která jistě obsahuje spoustu chyb. Takže prosím zatím berte s rezervou.

První čtyři body připomínají základní definice a fakta o bilineárních formách, která budeme potřebovat.

1. **Bilineární formy.** Mějme vektorový prostor V dimenze n nad tělesem T a bázi $M = \{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$. Ať $f : V \times V \to T$ je bilineární forma (dále BF). Maticí f vzhledem k bázi M rozumíme matici $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, kde $a_{ij} = f(m_i, m_j)$. Hodnotu $f(u, v)$, kde $\{u\}_M = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $\{v\}_M = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ vypočítáme

$$f(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_i v_j \quad \text{(analytické vyjádření)}$$

nebo lépe

$$\begin{aligned} f(u,v) &= (u_1, u_2, \ldots, u_n) \cdot A \cdot (v_1, v_2, \ldots, v_n)^T \\ &= \{u\}_M \cdot A \cdot \{v\}_M^T. \end{aligned}$$

Pro každý vektor $u \in V$ definujeme lineární formy $f(u, \_)$ a $f(\_, u)$ takto:

$$f(u,\_)(v) = f(u,v), \quad f(\_,u)(v) = f(v,u), \quad \text{kde } v \in V.$$

Matice těchto forem vzhledem k M jsou:

$$\{f(u,\_)\}_M = \{u\}_M \cdot A, \quad \{f(\_,u)\}_M = \{u\}_M \cdot A^T.$$

Levý a pravý vrchol f se definuje následujícím způsobem:

$$V_l(f) = \{u \in V \mid (\forall v \in V)\ f(u,v) = 0\} = \{u \in V \mid f(u,\_) = 0\}$$

$$V_p(f) = \{u \in V \mid (\forall v \in V)\ f(v,u) = 0\} = \{u \in V \mid f(\_,u) = 0\},$$

kde první nula na obou řádcích značí nulový prvek tělesa a druhá nula značí nulovou formu.

Tedy

$$\{V_l(f)\}_M = W_{A^T}, \quad \{V_p(f)\}_M = W_A,$$

kde W_X je množina všech řešení homogenní soustavy rovnic s maticí X.

Levý a pravý vrchol mají stejnou dimenzi, této dimenzi říkáme nulita, značení $n(f)$. Hodností f rozumíme číslo $h(f) = n - n(f) = h(A)$.

2. **Tvrzení.** Nechť A je matice BF f vzhledem k bázi M. Nechť B je matice přechodu od báze M k bázi N. Pak matice f vzhledem k N je $B^T AB$.

3. **Symetrické a antisymetrické BF.** Říkáme, že BF f je **symetrická**, pokud $f(u, v) = f(v, u)$ pro libovolné vektory $u, v \in V$. Je snadné ověřit (ověřte!), že f je symetrická právě tehdy, když její matice A vzhledem k libovolné (ekvivalentně každé) bázi je symetrická (tj. $a_{ij} = a_{ji}$ neboli maticově $A = A^T$). U symetrických bilineárních forem levý a pravý vrchol splývá a mluvíme o **vrcholu** (značení $V(f)$).

   Říkáme, že BF f je **antisymetrická**, pokud $f(u, v) = -f(v, u)$ pro libovolné vektory $u, v \in V$. BF f je antisymetrická právě tehdy, když její matice A vzhledem k libovolné (ekvivalentně každé) bázi je antisymetrická (tj. $a_{ij} = -a_{ji}$ neboli $A = -A^T$).

4. **Kvadratické formy.** Máme-li bilineární formu f, definujeme $f_2(u) = f(u, u)$ (f_2 je tedy zobrazení $f_2 : V \to T$) a říkáme, že f_2 je **kvadratická forma** vytvoření bilineární formou f. V tělesech charakteristiky různé od 2 existuje pro každou kvadratickou formu právě jedna symetrická bilineární forma, která ji vytváří.

5. **Definice polární báze.** Nechť $f : V \times V \to T$ je BF na vektorovém prostoru V dimenze n nad tělesem T.

   Báze $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ prostoru V se nazývá **polární báze** BF f, pokud $f(p_i, p_j) = 0$ pro libovolná $i, j \in \{1, 2, \dots n\}$, $i \neq j$. Jinými slovy, pokud matice f vzhledem k P je diagonální.

6. **Otázka.** Existuje polární báze triviální (= nulové) BF?

7. **Odpověď.** Ano. Všechny báze V jsou v tomto případě polární.

8. **Otázka.** Existuje polární báze BF f, pokud f není symetrická?

9. **Odpověď.** Neexistuje. Matice f vzhledem k polární bázi je diagonální, čili symetrická. Tedy f je symetrická BF.

10. **Otázka.** Existuje polární báze nějaké nenulové antisymetrické BF?

11. **Odpověď.** Ano. Pokud $char(T) = 2$, každá symetrická BF je zároveň antisymetrická. Např. diagonální matice je antisymetrická.

12. **Otázka.** Existuje polární báze nějaké nenulové antisymetrické BF nad tělesem T, $char(T) \neq 2$?

13. **Odpověď.** Ne. Pro taková tělesa je každá antisymetrická a zároveň symetrická BF nutně nulová.

14. **Úmluva.** Naším cílem je naučit se pro danou BF f najít její polární bázi (pokud existuje). To se nám může podařit, jen je-li f symetrická. Popsané metody fungují pro tělesa charakteristiky různé od 2 (nad tělesem charakteristiky 2 existují symetrické BF, které polární bázi nemají). Dále budeme předpokládat, že

    f je symetrická BF na vektorovém prostoru V dimenze n nad tělesem T, kde $char(T) \neq 2$.

    V tomto případě polární báze vždy existuje.

15. **Polární báze – Metoda I.**

    1. Najdeme vektor $p_1 \in V$ takový, že $f_2(p_1) \neq 0$. Určíme $f(p_1, \_)$.
    2. Najdeme vektor $p_2 \in Ker(f(p_1, \_))$ takový, že $f_2(p_2) \neq 0$. Určíme $f(p_2, \_)$.
    3. Najdeme vektor $p_3 \in Ker(f(p_1, \_)) \cap Ker(f(p_2, \_))$ takový, že $f_2(p_3) \neq 0$. Určíme $f(p_3, \_)$.

    atd.

    Jsou dvě možnosti

    (a) Podaří se nám provést n kroků. V tomto případě $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ je hledaná polární báze f.

    (b) V i-tém kroku se nám nepodaří najít najít $p_i \in \bigcap_{j=1}^{i-1} Ker(f(p_j, \_))$, aby $f_2(p_i) \neq 0$. V tomto případě je

    $$V(f) = \bigcap_{j=1}^{i-1} Ker(f(p_j, \_))$$

    a hledaná polární báze je $P = \{p_1, \dots, p_{i-1}\} \cup$ libovolná báze $V(f)$.

16. **Poznámka.** V i-tém kroku tedy potřebujeme v daném prostoru U buď najít vektor $u \in U$, aby $f_2(u) \neq 0$, nebo rozhodnout, že takový vektor neexistuje. Jistě nebudeme zkoušet všechny vektory v U (v prostorech nad nekonečným tělesem jich je nekonečně mnoho, takže ani nemůžeme). Následující tvrzení říká, že stačí zkoušet vektory z libovolné báze a součty dvojic vektorů z této báze.

17. **Tvrzení.** Nechť f je BF na vektorovém prostoru U nad tělesem T, $char(T) \neq 2$. Nechť $\{u_1, \dots u_n\}$ je báze U. Pak f je triviální právě tehdy, když $f_2(u_i) = 0$ a $f_2(u_i + u_j) = 0$ pro každá $i, j \in \{1, \dots n\}$, $i \neq j$.

18. **Důkaz.** Není-li forma triviální, pak pro nějaká i, j je $f(u_i, u_j) \neq 0$. Protože

$$f_2(u_i + u_j) = f_2(u_i) + f(u_i, u_j) + f(u_j, u_i) + f_2(u_j),$$

f je symetrická a $char(T) \neq 2$, máme

$$0 \neq 2f(u_i, u_j) = f_2(u_i + u_j) - f_2(u_i) - f_2(u_j),$$

takže jedno z čísel na pravé straně je nenulové.

19. **Proč metoda I funguje?** Návod k důkazu: Předpokládejme, že nastane varianta (a). Pro libovolná přirozená čísla $i < j \leq n$, vektor p_j volíme (mimo jiné) v $Ker(p_i, \_)$, neboli $f(p_i, p_j) = 0$. Takže stačí pouze ověřit, že vektory $p_1, \dots, p_n$ tvoří bázi. K tomu stačí pro každé $i < n$ ověřit, že $p_i \notin \langle p_{i+1}, p_{i+2}, \dots, p_n \rangle$. Ale vektory $p_{i+1}, p_{i+2}, \dots, p_n$ volíme v prostoru $U = Ker(f(p_i, \_))$. Tedy $p_i \notin U$, neboť $f_2(p_i) = f(p_i, p_i) \neq 0$.

Pokud nastane varianta (b), snadno nahlédneme, že $\bigcap_{j=1}^{i-1} Ker(f(p_j, \_))$ je vrchol f (nahlédněte!). Zbytek se dokáže podobně jako v předchozím odstavci (dokažte!).

20. **Příklad.** Najděte polární bázi BF $f : Z_3^4 \times Z_3^4 \to Z_3$ zadané maticí A vzhledem ke kanonické bázi.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

21. **Řešení.** Nejprve si všimneme, že f je opravdu symetrická BF, tedy polární báze existuje.

1. Máme zvolit p_1, aby $f_2(p_1) = f(p_1, p_1) = 0$. Tedy např.

$$p_1 = (1, 0, 0, 0), \quad f_2(p_1) = p_1 \cdot A \cdot p_1^T = 2$$

Určíme matici M_1 lineární formy $f(p_1, \_)$:

$$M_1 = \{f(p_1, \_)\}_{k.b.} = p_1 \cdot A = (2\ 1\ 2\ 1).$$

2. Určíme $Ker(f(p_1, \_))$, tedy řešení homogenní soustavy rovnic s maticí M_1:

$$Ker(f(p_1, \_)) = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle, \quad \text{kde}$$

$$a_1 = (1, 1, 0, 0), \quad a_2 = (2, 0, 1, 0), \quad a_3 = (1, 0, 0, 1).$$

V tomto prostoru máme najít p_2, aby $f_2(p_2) \neq 0$. Postupujeme podle tvrzení 17. Zkusíme a_1, bohužel $f_2(a_1) = 0$. Podobně spočteme $f_2(a_2) = 0$, ale $f_2(a_3) = 2$ (pokud by nám vyšlo $f_2(a_3) = 0$, museli bychom ještě spočítat $f_2(a_1 + a_2)$, $f_2(a_1 + a_3)$, $f_2(a_2 + a_3)$). Volíme

$$p_2 = a_3 = (1, 0, 0, 1), \quad f_2(p_2) = 2$$

a spočteme

$$M_2 = \{f(p_2, \_)\}_{k.b.} = p_2 \cdot A = (0\ 0\ 1\ 2).$$

3. Určíme $Ker(f(p_1, \_)) \cap Ker(f(p_2, \_))$, neboli řešení homogenní soustavy rovnic s maticí

$$\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Matice je rovnou v Gaussově tvaru, tedy ihned píšeme řešení (parametry volíme na 2. a 4. pozici)

$$Ker(f(p_1, \_)) \cap Ker(f(p_2, \_)) = \langle b_1, b_2 \rangle, \quad \text{kde}$$

$$b_1 = (0, 0, 1, 1), \quad b_2 = (1, 1, 0, 0).$$

Zkusíme $f_2(b_1) = 0$, $f_2(b_2) = 0$, $f_2(b_1 + b_2) = 0$. Tedy jsme se dostali do vrcholu.

Zjistili jsme, že

$$\begin{aligned}
\text{Vrchol} &= V(f) = \langle (0,0,1,1),(1,1,0,0)\rangle \\
\text{Nulita} &= n(f) = dim\ V(f) = 2 \\
\text{Hodnost} &= h(f) = 4 - n(f) = 2 \\
\text{Polární báze} &= P = \{p_1,p_2,p_3,p_4\} = \\
&= \{(1,0,0,0),(2,1,0,1),(0,0,1,1),(1,1,0,0)\} \\
\text{Mat. vzhledem k } P &= \begin{pmatrix} f_2(p_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_2(p_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_2(p_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_2(p_4) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

22. **Polární báze – Metoda II.**

Pokud je vrchol BF netriviální, v nějakém kroku nastane situace z bodu (b). Abychom ověřili, že už nemáme pokračovat dál (tj. dostali jsme se do vrcholu) musíme vypočítat hodnotu $f_2(u)$ pro řádově $|n(f)|^2$ vektorů. Tuto nevýhodu do značné míry odstraňuje následující úprava předchozího postupu:

1. Najdeme vrchol $V(f)$ BF f (resp. jeho bázi).
2. Najdeme D bázi nějakého doplňku vrcholu. Určíme g – restrikci f na $\langle D\rangle$.
3. Najdeme polární bázi g (metodou I.).

Polární báze P je $P =$ báze $g \cup$ báze $V(f)$.

23. **Příklad.**

Spočítáme ještě jednou předchozí příklad.

1. Najdeme vrchol, neboli řešení homogenní soustavy rovnic s maticí A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Tedy
$$V(f) = \langle (0,0,1,1),(1,1,0,0) \rangle \,.$$

2. Najdeme bázi doplňku vrcholu. Zvolíme např.

$$D = \{d_1, d_2\} = \{(0,1,0,0),(0,0,0,1)\}.$$

Vidíme, že D je skutečně báze doplňku: vektory z D tvoří s bází $V(f)$ bázi Z_3^4, protože pokud je napíšeme pod sebe ve vhodném pořadí, vznikne dolní trojúhelníková matice s nenulovými prvky na diagonále.

Matice g – restrikce f na $\langle D \rangle$ je

$$B = \begin{pmatrix} f(d_1,d_1) & f(d_1,d_2) \\ f(d_2,d_1) & f(d_2,d_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.1. Zvolíme $\{p_1\}_D = (1,0)$ (neboli $p_1 = \{0,1,0,0\}$), $g_2(p_1) = 2$. Matice $g(p_1, \_)$ vzhledem k D je $\{p_1\}_D \cdot B = (2\ 2)$.

3.2. Spočteme $\{Ker(g(p_1, \_))\}_D = \langle (1,2) \rangle$. Zvolíme $\{p_2\}_D = (1,2)$ (neboli $p_2 = (0,1,0,2)$) a máme $g_2(p_2) = 2$.

Polární báze je $P = \{(0,1,0,0),(0,1,0,2),(0,0,1,1),(1,1,0,0)\}$.

24. **Polární báze – Metoda III – Symetrické úpravy.**

Mějme BF f a její matici A vzhledem k bázi M. Napíšeme si vedle matice A jednotkovou matici. Nyní provádíme symetrické úpravy (viz níže), abychom v levé části matice dostali matici diagonální:

$$(A|E) \sim \ldots \sim (D|P)$$

Jakmile se nám to podaří, máme v řádcích matice P vektory polární báze (vyjádřené vzhledem k M). Navíc D je matice f vzhledem k P.

Jedna symetrická úprava sestává ze dvou kroků:

- Provedeme elementární řádkovou úpravu (například 3-násobek 1. řádku přičteme ke 2. řádku; příp. vynásobíme 4. řádek číslem 5).
- Tutéž úpravu provedeme se sloupci (např. 3-násobek 1. sloupce přičteme ke 2. sloupci; příp. vynásobíme 4. sloupec číslem 5).

Symetrických úprav lze provádět i více najednou, patřičné sloupcové úpravy pak musíme provádět v opačném pořadí. Vždy je dobré si po úpravě prohlédnout, zda vzniklá matice je opět symetrická – provedením symetrické úpravy se totiž symetrie nenaruší.

Symetrickou matici lze vždy převést symetrickými úpravami na matici diagonální: Gaussovou eliminací se snažíme převést matici na dolní trojúhelníkový tvar, eliminaci horního trojúhelníku nám zajistí symetrické úpravy. Oproti běžné eliminaci se můžeme setkat ještě s jedním problémkem, viz dále.

25. **Proč metoda III funguje?** Připomeňme, že provedení elementární řádkové úpravy lze vyjádřit násobením regulární maticí, řekněme B, zleva (tzv. matice elementární transformace). Snadno nahlédneme (nahlédněte!), že provedení odpovídající úpravy na sloupce je totéž, jako násobit maticí B^T zprava.

    Po provedení i symetrických úprav máme matici $(X|Y)$. Indukcí podle i dokážeme, že X je matice f vzhledem k bázi N takové, že matice přechodu od M k N je Y^T. Na začátku (pro $i = 0$) tvrzení platí. Podle předchozího odstavce lze jednu symetrickou úpravu zapsat maticově takto:
$$(X|Y) \sim (BX|BY) \sim (BXB^T|BY),$$
    tedy tvrzení opět platí podle bodu 2.

26. **Příklad.**

    Spočítáme opět stejný příklad.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

    V první úpravě jsme 1. řádek přičetli k 2. a 4. a dvojnásobek 1. řádku přičetli k 3. V druhé úpravě jsme totéž provedli se sloupci (zde je jedno v jakém pořadí provádíme úpravy – úpravy spolu komutují). Ve třetí úpravě jsme 3. řádek přičetli k 4., čtvrtá je symetrická pro slupce.

Vidíme tedy, že $P = \{(1,0,0,0),(1,1,0,0),(2,0,1,0),(0,0,1,1)\}$ je polární báze (a matici f vzhledem k P máme vlevo). Z výsledku je rovněž možné vyčíst vrchol (jeho bázi tvoří právě všechny řádky na pravé straně, kde vlevo jsou samé nuly).

27. **Příklad.** Najděte polární bázi BF $f : Z_3^3 \times Z_3^3 \to Z_3$ zadané v kanonické bázi maticí A.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

28. **Řešení.** K eliminaci prvního slupce bychom potřebovali mít v levém horním rohu nenulový prvek tělesa. Co když za tímto účelem zkusíme prohodit 1. a 2. řádek? Potom ale musíme prohodit 1. a 2. sloupec a v levém horním rohu bude zase nula. To je ona výše zmiňovaná drobná záludnost.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Nejprve jsme přičetli 2. řádek k 1 a totéž pro sloupce. Potom jsme první řádek přičetli k 2. a 3. a opět totéž pro sloupce.

Vidíme, že f je regulární ($n(f) = 0$, $h(f) = 3$). Polární báze je $P = \{(1,1,0),(1,2,0),(1,1,1)\}$. Matice f vzhledem k P je (samozřejmě) diagonální, kde na diagonále jsou postupně prvky $1,2,2$.

29. **Polární báze – Metoda IV.**

Tato metoda se příliš nehodí k počítání polární báze. Má však následující výhody:

- Dává explicitní vyjádření (vzoreček) pro polární bázi.
- Hodí se k počítání signatury BF (viz níže).

Mějme matici A (typu $n \times n$) BF f vzhledem k bázi M. Označme A_i matici (typu $i \times i$), která vznikne z A vynecháním posledních $n - i$ řádků a sloupců. Pro $i \leq j$ označme A_{ij} algebraický doplněk prvku a_{ij} v matici A_j, přičemž definujeme $A_{11} = 0$.

Předpokládejme, že pro všechna i je $|A_i| \neq 0$ (!!!). Pak

$$\begin{aligned}
\{p_1\}_M &= (A_{11}, 0, 0, \ldots), \\
\{p_2\}_M &= (A_{12}, A_{22}, 0, 0, \ldots), \\
&\ldots \\
\{p_i\}_M &= (A_{1i}, A_{2i}, \ldots, A_{ii}, 0, 0, \ldots), \\
&\ldots
\end{aligned}$$

je polární báze BF f. Matice vzhledem k této bázi má na diagonále postupně prvky

$$|A_1|,\ |A_1| \cdot |A_2|,\ |A_2| \cdot |A_3|,\ \ldots,\ |A_{n-1}| \cdot |A_n|.$$

Uvědomme si, že tuto metodu lze použít, pouze když jsou všechny hlavní subdeterminanty nenulové. Tedy např. pro singulární BF ji nemůžeme (přímo) použít nikdy.

30. **Proč metoda IV funguje?** Pro zjednodušení zápisu položme $|A_0| = 1$. Nejprve si všimněme, že $A_{ii} = |A_{i-1}| > 0$ (to je předpoklad), tedy $\{p_1, \ldots, p_n\}$ je báze. Z věty o rozvoji (a falešném rozvoji) determinantu podle i-tého sloupce vyplývá

$$\begin{aligned}
f(p_i, p_j) &= \{p_i\}_M \cdot A \cdot \{p_j\}_M^T \\
&= (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{(i-1)\times}, |A_i|, c_1, c_2 \ldots) \cdot (A_{1j}, A_{2j}, \ldots, A_{jj}, 0, 0, \ldots)^T,
\end{aligned}$$

kde c_k jsou nějaká čísla. Vidíme, že pro $i = j$ vyjde $f_2(p_i) = |A_i| \cdot A_{ii} = |A_{i-1}| \cdot |A_i|$ a pro $i > j$ máme $f(p_i, p_j) = 0$.

31. **Polární báze – Metoda V – Gramm-Schmidtova ortogonalizace.** S touto metodou se seznámíme v kapitole o unitárních prostorech. Lze ji použít k hledání polární báze pozitivně definitních forem na reálných vektorových prostorech (v kontextu unitárních prostorů se taková báze nazývá ortogonální).

Signatura bilineárních forem nad tělesem $\mathbf{R}$

32. **Úmluva.** V této části bude f vždy symetrická BF nad tělesem reálných čísel.

33. **Definice signatury. Signaturou** BF f je trojice $(n(f), p(f), q(f))$, kde $n(f)$, $p(f)$, $q(f)$ je pořadě počet nul, kladných, záporných prvků na diagonále matice f vzhledem k libovolné polární bázi f.

34. **Poznámka.** Uvědomme si, že $n(f)$ je opravdu nulita BF f, takže značení je konzistentní. Korektnost definice (nezávislost na volbě polární báze) je obsažena v následující větě.

35. **Zákon setrvačnosti bilineárních forem.** Počet nulových, kladných ani záporných prvků na diagonále matice symetrické BF f vzhledem k polární bázi nezávisí na volbě této báze.

36. **Jak spočítat signaturu?** Jedna možnost je najít polární bázi a spočítat matici BF vzhledem k této bázi. Jiná možnost je využít metodu IV – spočítáme hlavní subdeterminanty $|A_1|, |A_2|, \ldots, |A_n|$ matice dané BF. **Pokud jsou všechny nenulové** víme, že vzhledem k nějaké polární bázi (tu počítat nemusíme) má f matici, která má na diagonále prvky $|A_1|, |A_1| \cdot |A_2|, |A_2| \cdot |A_3|, \ldots, |A_{n-1}| \cdot |A_n|$.

37. **Příklad.** Matice BF f vzhledem k bázi M je A. Určete signaturu f.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

38. **Řešení.** Spočítáme $|A_1| = 1, |A_2| = -3, |A_3| = -9, |A_4| = 3$. Tedy $|A_1| > 0, |A_1| \cdot |A_2| < 0, |A_2| \cdot |A_3| > 0, |A_3| \cdot |A_4| < 0$ a signatura f je $(0, 2, 2)$.

39. **Příklad.** Určete signaturu BF f na R^4 zadané vzhledem k M maticí A.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

40. **Řešení.** Matice A je zřejmě regulární, tedy f je regulární. Nemůžeme ale použít předchozí postup přímo, protože již první hlavní subdeterminant je nulový. Stačí si ale vzpomenout, že provedením symetrické úpravy vznikne matice téže BF f vůči jiné bázi, tedy signatura se nezmění:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

Nyní je $|B_1| \neq 0$, ale $|B_2| = 0$. Provedeme ještě jednu úpravu.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = C$$

Nyní již $|C_1| = 2, |C_2| = 8, |C_3| = -8, |C_4| = 4$ a signatura je (0,2,2).

41. **Signatura pro singulární BF.** Obecně můžeme postupovat např. takto

- Určíme vrchol (tedy i $n(f)$) a matici restrikce g BF f na nějaký doplněk vrcholu (ta je regulární).
- Pokud to je nutné, provedeme symetrické úpravy, aby všechny hlavní subdeterminanty byly nenulové.
- Ze subdeterminantů určíme signaturu g – $(0, p(g), q(g))$. Signatura f je $(n(f), p(g), q(g))$.

42. **Příklad.** Určete signaturu BF f na R^3 zadané vzhledem k M maticí A.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

43. **Řešení.** Řešením homogenní soustavy rovnic s maticí A určíme

$$\{V(f)\}_M = \langle(1, -1, -1)\rangle\,, \quad n(f) = 1.$$

Báze doplňku vrcholu je např. $\{D\}_M = \{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ a matice restrikce f nad $\langle D \rangle$ vzhledem k D je

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Provedeme symetrickou úpravu

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

Nyní je $|B_1| = 2, |B_2| = -1$, tedy $|B_1| > 0, |B_1| \cdot |B_2| < 0$. Signatura této restrikce je tedy $(0, 1, 1)$. Signatura f je $(1, 1, 1)$.