Testy a domácí úkoly, lineární algebra 09/10 zima

Varianta (a) je zadání pro cvičení v 11:30 M2, varianta (b) pro cvičení v 14:00 K9.

Domácí úkoly jsou někdy různé podle počtu dosažených bodů z testu. Odevzdávají se před cvičením, osobně nebo emailem.

Test 1. ze dne 7.10.2009. Určete všechna řešení následující soustavy rovnic nad tělesem racionálních čísel

(a)

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 2 & -2 & 4 & 6 & 4 & 8 \\ 2 & -2 & 3 & 8 & 9 & 11 \\ -1 & 1 & -3 & -1 & 4 & -3 \end{array}\right)$$

(b)

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} -2 & 2 & -6 & -2 & 8 & -6 \\ 2 & -2 & 3 & 8 & 9 & 11 \\ -1 & 1 & 2 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

Domácí úkol k 1. testu pro studenty s 0-2 body. Odevzdat do 4.11.2009. V závislosti na parametrech $a, b \in \mathbb{C}$ najděte všechna řešení následující soustavy rovnic nad komplexními čísly

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2i & -i & 0 \\ i & a & 4+2i & 0 \\ -i & 2 & b & 0 \end{array}\right)$$

Domácí úkol k 1. testu pro studenty s 3 body. Odevzdat do 4.11.2009. V závislosti na parametrech $a, b, c \in \mathbb{R}$ najděte všechna řešení následující soustavy rovnic (nad $\mathbb{R}$)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & 0 & 1 \\ a & 0 & c & 1 \\ 0 & b & c & 1 \end{array}\right)$$

Test 2. ze dne 21.10.2009. Určete všechna řešení následující soustavy rovnic nad tělesem $\mathbb{Z}_5$.

(a)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

(b)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

Domácí úkol k 2. testu pro studenty s 0-2 body. Odevzdat do 11.11.2009. V závislosti na parametru $a \in \mathbb{Z}_7$ najděte všechna řešení následující homogenní soustavy rovnic nad $\mathbb{Z}_7$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & a & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Domácí úkol k 2. testu pro studenty s 3 body. Odevzdat do 11.11.2009. V závislosti na parametru $a \in \mathbb{Z}_7$ najděte všechna řešení následující soustavy rovnic nad $\mathbb{Z}_7$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & a & 2 & 4 \end{array}\right)$$

Test 3. ze dne 4.11.2009. Zjistěte, zda jsou následující vektory z prostoru $\mathbb{Z}_3^4$ lineárně závislé. Pokud ano, vyjádřete některý z těchto vektorů jako lineární kombinaci ostatních.

(a) $(2,1,0,2),(1,1,2,2),(1,0,1,2),(2,2,1,2)$

(b) $(1,2,0,1),(2,2,1,1),(2,0,2,1),(1,1,2,1)$

Domácí úkol k 3. testu pro studenty s 0-3 body. Odevzdat do 25.11.2009. Pro která $a \in \mathbb{R}$ jsou vektory $(a,-4,-1),(4,-6,-3),(1,1,-a)$ lineárně závislé? Pro tato a vyjádřete jeden z vektorů jako lineární kombinaci ostatních.

Test 4. ze dne 11.11.2009. Najděte nějakou bázi podprostoru U vektorového prostoru $\mathbb{Z}_2^5$ a doplňte nalezenou bázi U na bázi $\mathbb{Z}_2^5$.

(a) $U = \langle(1,1,0,1,1),(1,0,1,0,1),(1,0,1,1,0),(1,0,1,1,1),(1,1,0,0,0)\rangle$

(b) $U = \langle(1,0,1,1,1),(1,1,0,0,1),(1,1,0,1,0),(1,1,0,1,1),(1,0,1,0,0)\rangle$

Domácí úkol k 4. testu pro studenty s 0-2 body. Odevzdat do 25.11.2009. Najděte bázi prostoru $U = \langle(0,1,-3,4),(2,2,2,2),(1,-1,3,7)\rangle \leq \mathbb{R}^4$ obsahující vektor $(1,4,-4,-1)$.

Domácí úkol k 4. testu pro studenty s 3 body. Odevzdat do 25.11.2009. Z vektorů $(1,0,2,-3),(3,2,1,-5),(-1,2,1-2),(-3,0,2,0)$ vyberte bázi jejich lineárního obalu.

Test 5. ze dne 18.11.2009. V závislosti na parametrech $a, b \in \mathbb{Z}_3$ určete dimenzi prostoru $U \leq \mathbb{Z}_3^3$.

(a) $U = \langle(a,1,2),(1,b,2),(1,2,1)\rangle$

(b) $U = \langle (a,2,1),(2,b,1),(2,1,2) \rangle$

Domácí úkol k 5. testu pro studenty s 0-2 body. Odevzdat do 2.12.2009. Určete počet všech trojic (a,b,c), $a,b,c \in \mathbb{Z}_3$, takových, že prostor $U = \langle (a,1,1),(1,b,1),(1,1,c) \rangle \leq \mathbb{Z}_3^3$ má dimenzi 2.

Domácí úkol k 5. testu pro studenty s 3 body. Odevzdat do 2.12.2009. Určete počet všech trojic (a,b,c), $a,b,c \in \mathbb{Z}_5$, takových, že prostor $U = \langle (a,1),(b,c) \rangle \leq \mathbb{Z}_5^2$ má dimenzi 1.

Test 6. ze dne 25.11.2009. Spočítejte A^{-1}, kde A je následující matice nad $\mathbb{Z}_5$:

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Domácí úkol k 6. testu pro studenty s 0-3 body. Odevzdat do 9.12.2009. Spočítejte A^{-1}, kde A je následující matice nad $\mathbb{Z}_{11}$:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 9 \\ 4 & 8 & 7 \\ 3 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Test 7. ze dne 2.12.2009. Uvažujme permutaci π nad S_9 zadanou tabulkou

(a)

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 7 & 8 & 3 & 6 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 8 & 6 & 3 & 9 & 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

(i) Zapište π jako složení nezávislých cyklů.

(ii) Určete znaménko π a zdůvodněte.

(iii) Spočtěte π^{-1}.

(iv) Spočtěte $(1\ 3\ 5)^{-1} \circ \pi \circ (1\ 3\ 5)$.

Domácí úkol k 7. testu pro studenty s 0-3 body. Odevzdat do 16.12.2009.
Spočítejte π^{2009} a určete znaménko π^{2009}, kde

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 7 & 8 & 3 & 6 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

a π^{2009} značí permutaci $\pi \circ \pi \circ \ldots \circ \pi$ (kde π je ve výrazu 2009 krát).

Test 8. ze dne 9.12.2009. Spočítejte determinant následující reálné matice

(a)

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Domácí úkol k 8. testu pro studenty s 0-2 body. Odevzdat do 6.1.2010.
V závislosti na parametrech $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ spočítejte determinant matice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & c & 2 \\ 2 & 2 & a & 2 \\ -1 & 2 & b & 1 \\ 1 & 2 & d & 1 \end{pmatrix}.$$

Domácí úkol k 8. testu pro studenty s 3 body. Odevzdat do 6.1.2010.
Spočítejte determinant reálné matice

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Test 9. ze dne 16.12.2009. Spočítejte A^{ad}, $|A|$, A^{-1} pro následující matici A nad tělesem $\mathbb{Z}_7$.

(a)

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \\ 6 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Domácí úkol k 9. testu pro studenty s 0-3 body. Odevzdat do 13.1.2009.
V závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$ spočítejte A^{ad} pro následující reálnou matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Dále zjistěte, pro která a je A regulární a v těchto případech spočítejte A^{-1}.

Test 10. ze dne 6.1.2010.

(a) Homomorfismus $f : \mathbb{Z}_7^3 \to \mathbb{Z}_7^2$ je dán vztahem

$$f((x, y, z)) = (6x + 3y + 4z, 2x + 5z), \quad x, y, z \in \mathbb{Z}_7.$$

Určete matici f vzhledem k bazím B a C, kde

$$B = (1, 2, 3), (2, 4, 2), (1, 4, 6), \quad C = (4, 4), (3, 1).$$

(b) Homomorfismus $f : \mathbb{Z}_7^3 \to \mathbb{Z}_7^2$ je dán vztahem

$$f((x, y, z)) = (5x + 4y + 3z, 6x + 4z), \quad x, y, z \in \mathbb{Z}_7.$$

Určete matici f vzhledem k bazím B a C, kde

$$B = (2, 4, 6), (4, 1, 4), (2, 1, 5), \quad C = (5, 2), (3, 3).$$

Domácí úkol k 10. testu pro studenty s 0-3 body. Odevzdat do ∞.
Homomorfismus $f : \mathbb{Z}_7^2 \to \mathbb{Z}_7^3$ splňuje

$$f((1, 0)) = (2, 4, 1), \quad f((0, 1)) = (3, 3, 2).$$

Určete matici f vzhledem k bazím

$$B = (4, 1), (6, 6), \quad C = (2, 2, 2), (3, 3, 0), (4, 5, 5).$$