Příklad 1. V závislosti na parametrech $a, b, c, d, e, f, g \in \mathbb{Q}$ spočítejte determinant

$$\begin{vmatrix} 4 & 4 & -2 & 0 & g \\ b & 2d+3 & 5 & c & 2 \\ e & a & 12 & 0 & 0 \\ b & 3 & 5 & c & 2 \\ 0 & 6 & f & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Řešení.

$$\begin{vmatrix} 4 & 4 & -2 & 0 & g \\ b & 2d+3 & 5 & c & 2 \\ e & a & 12 & 0 & 0 \\ b & 3 & 5 & c & 2 \\ 0 & 6 & f & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 4 & -2 & 0 & g \\ 0 & 2d & 0 & 0 & 0 \\ e & a & 12 & 0 & 0 \\ b & 3 & 5 & c & 2 \\ 0 & 6 & f & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= c \cdot \begin{vmatrix} 4 & 4 & -2 & g \\ 0 & 2d & 0 & 0 \\ e & a & 12 & 0 \\ 0 & 6 & f & 0 \end{vmatrix} = c \cdot (-g) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2d & 0 \\ e & a & 12 \\ 0 & 6 & f \end{vmatrix} = c \cdot (-g) \cdot (-2d) \cdot \begin{vmatrix} e & 12 \\ 0 & f \end{vmatrix} = 2cdefg$$

V první úpravě jsme (-1)-násobek čtvrtého řádku přičetli k druhému a dále jsme používali rozvoj podle řádku nebo sloupce.

Příklad 2. Nechť

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

je matice nad tělesem $\mathbb{Z}_7$.

(i) Určete matici A^{ad} adjungovanou k A.

(ii) Pomocí předchozího výsledku určete A^{-1} (pokud existuje).

(i)

$$A^{ad} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) Protože $A \cdot A^{ad} = |A| \cdot E_3$, prvek na místě $1,1$ v součinu $A \cdot A^{ad}$ je roven determinantu. Tedy

$$|A| = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 4 = 5.$$

Matice je proto regulární a ze stejného vzorce dostáváme

$$A^{-1} = \frac{A^{ad}}{|A|} = \frac{1}{5}A^{ad} = 3A^{ad} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Příklad 3. Určete matici homomorfismu $f : U \to V$ vzhledem k bázím B a C, kde

$$U = \mathbb{Z}_5^3, \quad B = \{(2,4,1),(1,4,0),(3,3,0)\}$$

$$V = \langle (1,2,3),(3,1,0)\rangle \leq \mathbb{Z}_5^3, \quad C = \{(2,4,1),(1,2,1)\}$$

$$f(x,y,z) = (3x+4y+z, x+3y+2z, 3y+3z)$$

(To, že C je skutečně bází V a že f je korektně definován, ověřovat nemusíte.)

Řešení. Potřebujeme spočítat vyjádření vektorů $f(2,4,1) = (3,1,0)$, $f(1,4,0) = (4,3,2)$ a $f(3,3,0) = (1,2,4)$ v bázi C. To vede na řešení tří soustav rovnic, u kterých se liší jenom pravé strany. Budeme je řešit současně.

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 2 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 2 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Dopočtením řešení získáme $\{(3,1,0)\}_C = (3,2)$, $\{(4,3,2)\}_C = (2,0)$, $\{(1,2,4)\}_C = (2,2)$. Matice f vzhledem k B a C je tedy

$$[f]_{B,C} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$