Příklad 1. Určete všechna řešení následující soustavy rovnic nad $\mathbb{Z}_2$:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Řešení. Gaussovou eliminací převedeme zadanou soustavu na ekvivalentní soustavu v odstupňovaném tvaru:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Označíme proměnné pořadě $x_1, \dots, x_6$. Parametry jsou x_1, x_4, x_6. Spočteme partikulární řešení, dosadíme například $x_1 = x_4 = x_6 = 0$. Vyjde $(0,1,1,0,1,0)$. Bázi prostoru řešení příslušné **homogenní** soustavy spočítáme volbami $x_1 = x_4 = 0, x_6 = 1$ (vyjde $(0,1,1,0,1,1)$), $x_1 = x_6 = 0, x_4 = 1$ (vyjde $(0,1,0,1,0,0)$) a $x_4 = x_6 = 0, x_1 = 1$ (vyjde $(1,0,0,0,0,0)$). Báze prostoru řešení příslušné homogenní soustavy je tedy např. $\{(0,1,1,0,1,1), (0,1,0,1,0,0), (1,0,0,0,0,0)\}$. Množina všech řešení je

$$(0,1,1,0,1,0) + \langle (0,1,1,0,1,1), (0,1,0,1,0,0), (1,0,0,0,0,0) \rangle.$$

Poznámky.

- I když proměnná x_1 nehraje v řešení velkou roli, nelze ji ignorovat. To, že koeficient u x_1 je v každé rovnici 0, se projevuje tím, že vektor $(1,0,0,0,0,0)$ je řešením příslušné homogenní soustavy.

Příklad 2. V závislosti na $a, b \in \mathbb{Z}_3$ určete dimenzi podprostoru U vektorového prostoru $\mathbb{Z}_3^3$, kde

$$U = \langle \{(a,1,2), (1,b,2), (1+a^2,2,1)\} \rangle$$

Řešení. Hledaná dimenze je (podle definice) rovna hodnosti matice

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & b & 2 \\ 1+a^2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Hodnost matice se nemění řádkovými ani sloupcovými úpravami. Připomeňme, že hodnost matice v odstupňovaném tvaru je rovna počtu nenulových řádků.

Nejprve upravíme A do jednoduššího tvaru (který nebude vždy odstupňovaný):

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 2 & b & 1 \\ 1 & 2 & 1+a^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1+a^2 \\ 2 & b & 1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1+a^2 \\ 0 & b+2 & 2+a^2 \\ 0 & 0 & 1+a+a^2 \end{pmatrix} = B.$$

(V první úpravě jsme přeházeli sloupce, v druhé řádky a ve třetí jsme první řádek přičetli k ostatním.) Dosazením $a = 0, 1, 2$ zjistíme, že $1 + a + a^2 = 0$ právě tehdy, když $a = 1$. Pokud $b + 2 \neq 0$ a $1 + a + a^2 \neq 0$, pak je matice v odstupňovaném tvaru a má tři nenulové řádky, hodnost je tedy 3. Podmínky nastávají právě tehdy, když $b \neq 1$ a $a \neq 1$ (viz výše).

Pokud $a = 1$, pak matice B má tvar

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & b+2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tato matice je v odstupňovaném tvaru nezávisle na b. Pokud $b = 1$, pak máme jeden nenulový řádek (a tedy hodnost je 1). Pokud $b \neq 1$, pak máme dva nenulové řádky (hodnost je 2).

Zbývá možnost $a \neq 1$, $b = 1$. Matice B vypadá takto

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1+a^2 \\ 0 & 0 & 2+a^2 \\ 0 & 0 & 1+a+a^2 \end{pmatrix}$$

Tato matice není v odstupňovaném tvaru! Protože $1 + a + a^2 \neq 0$, lze matici řádkovými úpravami převést na

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1+a^2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(rozmyslete si proč!) a hodnost je tedy 2.

Pokud $a = b = 1$, pak dimenze U je 1; pokud $a = 1$ a $b \neq 1$, pak dimenze U je 2; pokud $a \neq 1$ a $b = 1$, pak dimenze U je 2; pokud $a \neq 1$ a $b \neq 1$, pak dimenze U je 3.

Poznámky.

- Řada z vás si neuvědomila, že je možné provádět i sloupcové úpravy, takže převod na odstupňovaný tvar byl komplikovanější.
- Někteří zjišťovali hodnost tak, že dosadili všechny možné kombinace hodnot parametrů (9). To je v tomto případě vcelku časově nenáročné. Je to rozhodně lepší, než pracovat s výrazy typu $\frac{2a^2+1+2ab}{ab+2b+2}$.
- Častou chybou bylo dělením výrazem závisejícím na parametrech aniž byste zkontrolovali, že nedělíte nulou.

- Velmi častou chybou bylo užití “tvrzení” následujícího typu: Matice

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

je v odstupňovaném tvaru, tedy její hodnost je počet nenulových řádků. **Toto není pravda! Matice X nemusí být v odstupňovaném tvaru!** Např. pokud $a = 0$, $b, c \neq 0$, matice X v odstupňovaném tvaru není (a její hodnost je 2).

Příklad 3. Uvažujme následující matici nad $\mathbb{Z}_5$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) (4 body) Spočítejte A^{-1} (pokud existuje)

(b) (1 bod) Pomocí výsledku v (a) najděte všechna řešení soustavy rovnic s maticí

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

Řešení.

(a) Řádkovými úpravami převedeme matici $(A|E)$ na tvar $(E|A^{-1})$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 4 \end{array}\right).$$

(V první úpravě jsme 1. řádek přičetli k 2. a dvojnásobek 1. řádku přičetli k 3.; v druhé úpravě jsme 2. řádek přičetli k 1. a 3.; ve třetí úpravě jsme trojnásobek třetího řádku přičetli k 1.; v poslední úpravě jsme 2. řádek vynásobili dvěmi a 3. řádek čtyřmi.) Takže

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

(b) Hledáme všechna řešení rovnice $A\mathbf{x}^T = \mathbf{b}^T$, kde $\mathbf{b} = (2,1,1)$. Vynásobením zleva maticí A^{-1} dostaneme po úpravě $\mathbf{x}^T = A^{-1}\mathbf{b}^T$. Tato rovnice je ekvivalentní původní (např. proto, že vynásobením maticí A zleva dostaneme původní rovnici). Daná soustava má tedy jediné řešení $\mathbf{x}$, kde

$$\mathbf{x}^T = A^{-1}\mathbf{b}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Jediným řešením soustavy je $\mathbf{x} = (4,1,2)$.

Příklad 4. Uvažujme následující dvě permutace $\pi, \rho \in S_{10}$

$$\pi : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 5 & 3 & 10 & 9 & 8 & 1 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\rho : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 10 & 4 & 9 & 6 & 8 & 7 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) (1 body) Napište permutace $\pi, \rho, \pi\rho$ a $\pi^{-1}\rho^{-1}$ v zápisu pomocí nezávislých cyklů.

(b) (1 bod) Určete znaménka permutací $\pi, \rho, \pi\rho$ a $\pi^{50}\rho^{121}\pi^{13}\rho^4$.

(c) (2 body) Spočítejte π^{100}.

Řešení.

(a)

$$\begin{aligned} \pi &= (1\ 4\ 10\ 7)(2\ 5\ 9)(6\ 8) \\ \rho &= (1\ 2\ 10)(3\ 4\ 9)(5\ 6\ 8) \\ \pi\rho &= (1\ 5\ 8\ 9\ 3\ 10\ 4\ 2\ 7) \\ \pi^{-1}\rho^{-1} &= (1\ 4\ 3\ 5\ 6\ 2\ 7\ 10\ 9) \end{aligned}$$

(b) Permutace je sudá právě tehdy, když má sudý počet nezávislých cyklů sudé délky. Permutace π má dva cykly sudé délky, permutace ρ žádný, tedy obě permutace jsou sudé, $\mathrm{sgn}(\pi) = \mathrm{sgn}(\rho) = 1$. Protože $\mathrm{sgn}(\alpha\beta) = \mathrm{sgn}(\alpha)\mathrm{sgn}(\beta)$ (pro libovolné permutace α, β), máme

$$\mathrm{sgn}(\pi\rho) = \mathrm{sgn}(\pi)\mathrm{sgn}(\rho) = 1$$

a

$$\mathrm{sgn}(\pi^{50}\rho^{121}\pi^{13}\rho^4) = \mathrm{sgn}(\pi)^{50}\mathrm{sgn}(\rho)^{121}\mathrm{sgn}(\pi)^{13}\mathrm{sgn}(\rho)^4 = 1.$$

Všechny čtyři zadané permutace jsou sudé.

(c) Pokud α, β jsou nezávislé cykly, pak zřejmě $(\alpha\beta)^n = \alpha^n\beta^n$ pro libovolné celé číslo n. Pokud α je cyklus délky k, pak $\alpha^k = id$ z čehož snadno plyne, že $\alpha^n = \alpha^{n \bmod k}$.

$$\pi^{100} = [(1\ 4\ 10\ 7)(2\ 5\ 9)(6\ 8)]^{100} = (1\ 4\ 10\ 7)^{100}(2\ 5\ 9)^{100}(6\ 8)^{100} =$$
$$= (1\ 4\ 10\ 7)^{100 \bmod 4}(2\ 5\ 9)^{100 \bmod 3}(6\ 8)^{100 \bmod 2} =$$
$$= (1\ 4\ 10\ 7)^0(2\ 5\ 9)^1(6\ 8)^0 = (2\ 5\ 9)$$

Chybná odpověď na některou z následujíchích otázek znamená nepochopení nějaké zásadní definice nebo trvrzení. Proto vám doporučuji si odpovědi důkladně promyslet.

Příklad 5.
• **ANO NE** Množina $\{(1,6,10),(3,1,5),(2,2,2),(1,3,4)\}$ je lineárně nezávislá v $\mathbb{R}^3$.
• **ANO NE** Množina $\{(2,1,2,1,1),(1,1,0,1,2),(2,1,0,1,2),(0,0,1,1,1)\}$ generuje $\mathbb{Z}_3^5$.
• **ANO NE** Nechť $U = \langle(1,2,3),(1,1,1)\rangle \leq \mathbb{R}^3$. Prostor U má dimenzi 2.

Řešení.

- NE. "Vektorů je moc": Každá lineárně nezávislá množina se dá doplnit na bázi. Každá báze $\mathbb{R}^3$ je tříprvková.
- NE. "Vektorů je málo": Z libovolné množiny generátorů lze vybrat bázi. Každá báze $\mathbb{Z}^5$ má pět prvků.
- ANO. Množina $M = \{(1,2,3),(1,1,1)\}$ zřejmě generuje U. Snadno nahlédneme, že M je lineárně nezávislá. M je proto báze U a tedy dimenze U (=počet prvků libovolné báze U) je 2.

Příklad 6.
• **ANO NE** Existuje soustava rovnic nad $\mathbb{R}$, která má právě osm řešení.
• **ANO NE** Pro libovolné podprostory U a V prostoru $\mathbb{R}^7$, množina $U \cup V$ je podprostorem $\mathbb{R}^7$.
• **ANO NE** Nechť U a V jsou podprostory prostoru $\mathbb{R}^7$ a $\dim U = \dim V = 5$. Pak $U = V$.

- Zde došlo k nepřesnosti v zadání. Mělo být "soustava lineárních rovnic". Pro obecnou soustavu rovnic (ne nutně lineárních) je odpověď ANO. Pro soustavu lineárních rovnic je odpověď NE: Množina všech řešení soustavy lin. rovnic je tvaru " partikulární řešení + všechna řešení příslušné homogenní soustavy ". Počet řešení je tedy roven počtu řešení příslušné homogenní soustavy. Množina všech řešení homogenní soustavy lin. rovnic nad $\mathbb{R}$ je podprostorem $\mathbb{R}^n$ (kde n je počet proměnných). Velikost libovolného podprostoru vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$ je buď 1 (v případě, že podprostor obsahuje pouze nulový vektor), nebo je nekonečná – pokud podprostor obsahuje nenulový vektor $\mathbf{v}$, pak i celou přímku $\{r\mathbf{v} : r \in \mathbb{R}\}$.

- NE. Například dva různé jednodimenzionální podprostory. Jejich sjednocení (dvě přímky) není uzavřené na sčítání.
- NE. Např. $U = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_5 \rangle$, $V = \langle \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_6 \rangle$, kde $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_6\}$ je libovolná lineárně nezávislá množina vektorů.

Příklad 7.
• **ANO NE** Existují matice A, B typu 2×2 nad $\mathbb{R}$, pro které $A \cdot B \neq B \cdot A$.
• **ANO NE** Existují matice A, B typu 2×2 nad $\mathbb{R}$, pro které $A \neq 0$, $B \neq 0$ a $A \cdot B = 0$.
• **ANO NE** Existují matice A, B typu 2×2 nad $\mathbb{R}$, pro které $A \cdot (B \cdot A) \neq (A \cdot B) \cdot A$

Řešení.

- ANO. Příkladem je téměř libovolná dvojice matic.
- ANO. Např. $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$.
- NE. Násobení matic je asociativní.

Příklad 8.
• **ANO NE** Jednotková matice typu 4×4 nad $\mathbb{Z}_{11}$ je regulární
• **ANO NE** Matice typu 4×4 nad $\mathbb{R}$ je regulární právě tehdy, když každá dvojice jejích řádků je lineárně nezávislá.
• **ANO NE** Matice typu 2×2 nad $\mathbb{R}$ je regulární právě tehdy, když řádky jsou lineárně nezávislé.

Řešení.

- ANO. Plyne z libovolné definice regulárnosti.
- NE. Např. pokud řádky matice jsou $(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0)$. Viz též poslední poznámka k řešení druhého domácího úkolu.
- ANO. To je jedna z definic regulárnosti.

Příklad 9.
• **ANO NE** Pro libovolnou permutaci $\pi \in S_{10}$ platí: Pokud $\pi^2 = id$, pak π je transpozice.

- **ANO NE** Pro libovolné permutace $\pi, \rho \in S_{10}$ existuje právě jedno $\nu \in S_{10}$, pro které $\pi \circ \nu = \rho$.
- **ANO NE** Pro libovolnou permutaci $\pi \in S_{10}$ platí: Pokud $\pi^3 = id$, pak π je sudá.

Řešení.

- NE. Např. $\pi = (1\ 2)(3\ 4)$
- ANO. Vynásobením rovnice permutací π^{-1} zleva dostaneme $\nu = \pi^{-1}\rho$ a toto ν zřejmě rovnost splňuje.
- ANO. $1 = \mathrm{sgn}(id) = \mathrm{sgn}(\pi^3) = (\mathrm{sgn}(\pi))^3$, čili nutně $\mathrm{sgn}(\pi) = 1$.