U příkladů podobných příkladům z 1. testu je uveden pouze výsledek.

Příklad 1. (5 bodů) Určete všechna řešení následující soustavy rovnic nad $\mathbb{Z}_2$:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Řešení.

$$(0,0,1,0,0,0) + \langle (1,0,0,0,0,0), (0,1,1,1,0,1), (0,1,0,0,1,0) \rangle$$

Příklad 2. (5 bodů) V závislosti na $a, b \in \mathbb{Z}_3$ určete dimenzi průniku podprostorů U, V vektorového prostoru $\mathbb{Z}_3^3$, kde

$$U = \langle \{(1,1,2), (a,1,2)\} \rangle, \quad V = \langle \{(1,a,2), (1,1,b)\} \rangle,$$

Řešení. Zjistíme dimenzi U:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a+2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix}.$$

Matice je v odstupňovaném tvaru nezávisle na a. Pokud $a = 1$, má jeden nenulový řádek a dimenze U je 1, pokud $a \neq 1$ má dva nenulové řádky a dimenze U je 2.

Zjistíme dimenzi V:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1+2a & b+1 \end{pmatrix}.$$

Matice je vždy v odstupňovaném tvaru. Pokud $a = 1$ a $b = 2$, má jeden nenulový řádek a dimenze V je 1, jinak dimenze V je 2.

Zjistíme dimenzi $U \vee V$. Pokud $a = 1$, pak $U \leq V$ a tím pádem dimenze $U \vee V$ je stejná jako dimenze V (a navíc zřejmě $U \cap V = U$, čili hledaná dimenze průniku je 1). Předpokládejme, že $a \neq 1$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a+2 & 0 & 0 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a+2 & 0 & 0 \\ 0 & a+2 & 0 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a+2 \\ 0 & a+2 & 0 \\ b & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & a+2 & 0 \\ 0 & 0 & a+2 \\ b & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Protože $a \neq 1$ jsou první tři řádky LN, tedy dimenze je alespoň 3. Vyšší ale být nemůže (je to podprostor $\mathbb{Z}_5^3$), takže dimenze spojení je 3. Podle věty o dimenzi spojení a průniku dopočteme, že dimenze průniku je $2+2-3=1$.

	dim U	dim V	dim $U \vee V$	dim $U \cap V$
$a \neq 1$	2	2	3	1
$a = 1, b \neq 2$	1	1	1	1
$a = 1, b = 1$	1	2	2	1

Příklad 3. Uvažujme následující matici nad $\mathbb{Z}_5$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) (4 body) Spočítejte A^{-1} (pokud existuje)

(b) (1 bod) Pomocí výsledku v (a) najděte všechna řešení soustavy rovnic s maticí

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Řešení.

(a)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Jediným řešením je $(3,1,4)$

Příklad 4. Uvažujme následující dvě permutace $\pi, \rho \in S_{10}$

$$\pi : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 8 & 5 & 7 & 10 & 6 & 4 & 9 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 5 & 4 & 7 & 1 & 2 & 3 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

(a) (1 body) Napište permutace $\pi, \rho, \pi\rho$ a $\pi^{-1}\rho^{-1}$ v zápisu pomocí nezávislých cyklů.

(b) (1 bod) Určete znaménka permutací $\pi, \rho, \pi\rho$ a $\pi^{50}\rho^{121}\pi^{13}\rho^4$.

(c) (2 body) Spočítejte π^{100}.

Řešení.

(a)

$$\begin{aligned}
\pi &= (1\ 3\ 5\ 10)(2\ 8\ 9)(4\ 7) \\
\rho &= (1\ 6\ 2\ 5)(3\ 4\ 7) \\
\pi\rho &= (1\ 6\ 8\ 9\ 2\ 10)(3\ 7\ 5) \\
\pi^{-1}\rho^{-1} &= (1\ 3\ 4)(2\ 6\ 10\ 5\ 9\ 8)
\end{aligned}$$

(b) π je sudá, ostatní jsou liché.

(c) $\pi^{100} = (2\ 8\ 9)$.

Příklad 5. (1 bod)
• **ANO NE** Množinu $\{(1,6,10),(3,1,5)\}$ lze doplnit na bázi $\mathbb{R}^3$.
• **ANO NE** Množina $\{(2,1,2,1,1),(1,1,0,1,2),(2,1,0,1,2),(0,0,1,1,1)\} \subseteq \mathbb{R}^5$ generuje prostor dimenze 5.
• **ANO NE** Nechť $U = \langle(2,2,2),(1,1,1)\rangle \leq \mathbb{R}^3$. Prostor U má dimenzi 3.

Řešení.

- ANO. Daná množina je lineárně nezávislá, tedy ji lze doplnit na bázi.
- NE. Daný prostor je generovaný čtyřprvkovou množinou. Protože z množiny generátorů lze vybrat bázi, má báze nejvýše 4 prvky, tedy dimenze je nejvýše 4.
- NE. Ze stejného důvodu.

Příklad 6. (1 bod)
• **ANO NE** Existuje soustava lineárních rovnic nad $\mathbb{Z}_5$, která má právě 25 řešení.
• **ANO NE** Pro libovolné podprostory U a V prostoru $\mathbb{R}^7$, množina $U \cap V$ je podprostorem $\mathbb{R}^7$.
• **ANO NE** Nechť U je podprostor prostoru $\mathbb{R}^7$ a $\dim U = 7$. Pak $U = \mathbb{R}^7$.

Řešení.

- ANO. Libovolná soustava rovnic taková, že prostor řešení homogenní soustavy má dimenzi 2, má 25 řešení. Tedy například soustava $x + y + z = 1$ jedné rovnice o 3 neznámých má 25 řešení.
- ANO. Průnikem podprostorů libovolného prostoru je podprostor.
- ANO. Libovolná báze B prostoru U je lineárně nezávislá sedmiprvková množina v $\mathbb{R}^7$. Tedy B je bází $\mathbb{R}^7$ (protože LN množinu lze doplnit na bázi a všechny báze mají stejný počet prvků), tedy $U = \langle B\rangle = \mathbb{R}^7$.

Příklad 7. (1 bod)
• **ANO NE** Existují matice A, B typu 2×2 nad $\mathbb{R}$, pro které $A+B \neq B+A$.
• **ANO NE** Existují matice A, B typu 2×2 nad $\mathbb{R}$, pro které AB je jednotková matice a BA není jednotková matice.
• **ANO NE** Existují matice A, B typu 2×2 nad $\mathbb{R}$, pro které $A \cdot (B + A) \neq (A \cdot B) + (A \cdot A)$

Řešení.

- NE.
- NE. Pokud AB je jednotková, pak A i B jsou regulární a $A = B^{-1}$.
- NE. Distributivita.

Příklad 8. (1 bod)
• **ANO NE** Pro libovolné matice typu 2×2 nad $\mathbb{R}$ platí: Pokud A a B jsou regulární, pak $A + B$ je regulární.
• **ANO NE** Matice typu 4×4 nad $\mathbb{R}$ je regulární právě tehdy, když řádky tvoří lineárně nezávislou množinu.
• **ANO NE** Matice typu 3×3 nad $\mathbb{R}$ je regulární právě tehdy, když sloupce generují $\mathbb{R}^3$.

Řešení.

- NE. Např $E + (-E)$ je nulová matice a E i $-E$ jsou zřejmě regulární. (E značí jednotkovou matici)
- ANO.
- ANO.

Příklad 9. (1 bod)
• **ANO NE** Pro libovolnou permutaci $\pi \in S_{10}$ platí: Pokud $\pi^3 = id$, pak π je trojcyklus (tj. permutace tvaru $(i\ j\ k)$).
• **ANO NE** Pro libovolné permutace $\pi, \rho, \sigma \in S_{10}$ existuje právě jedno $\nu \in S_{10}$, pro které $\pi \circ \nu \circ \sigma = \rho$.
• **ANO NE** Pro libovolnou permutaci $\pi \in S_{10}$ platí: Pokud $\pi^2 = id$, pak π je sudá.

Řešení.

- NE. Např. $\pi = (1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6)$.
- ANO. Vynásobením π^{-1} zleva a potom σ^{-1} zprava získáme $\nu = \pi^{-1}\rho\sigma^{-1}$ a toto ν je zřejmě řešením.
- NE. Např. $\pi = (1\ 2)$.