

Příklad 1. Určete levý a pravý vrchol, hodnotu a nulitu bilineární formy $f : \mathbb{Z}_5^3 \times \mathbb{Z}_5^3 \rightarrow \mathbb{Z}_5$, jejíž matice vzhledem ke kanonické bázi je

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Pravý vrchol je řešením homogenní soustavy rovnic s maticí A :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V_p(f) = \langle (0, 0, 1) \rangle.$$

Levý vrchol je řešením homogenní soustavy rovnic s maticí A^T :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V_l(f) = \langle (3, 4, 1) \rangle.$$

Nulita je dimenze levého (ekvivalentně pravého) vrcholu, čili $n(f) = 1$. Hodnota je dimenze prostoru minus nulita (ekvivalentně hodnota matice A), tedy $h(f) = 2$.

Příklad 2. Matice bilineární formy $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vzhledem k bázi B je A . Určete matici f vzhledem k bázi C , je-li

$$B = \{(0, 2), (1, 1)\}, \quad C = \{(1, 1), (0, 1)\}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Řešení. Spočítáme $[id]_{C,B}$ - matici přechodu od B k C . K tomu je třeba znát $\{1, 1\}_B$ a $\{0, 1\}_B$. Je okamžitě vidět, že $\{1, 1\}_B = (0, 1)$ a $\{0, 1\}_B = (1/2, 0)$, čili

$$[id]_{C,B} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Takže

$$[f]_C = [id]_{C,B}^T [f]_B [id]_{C,B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Příklad 3. Určete signaturu bilineární formy $f : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, jejíž matice vzhledem k jisté bázi je

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení. Použijeme metodu pomocí hlavních subdeterminantů. Protože je matice regulární, lze ji v principu použít, jen si musíme nejprve symetrickými úpravami upravit matici do tvaru, aby všechny čtyři hlavní subdeterminanty byly nenulové.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Přičetli jsme druhý řádek k prvnímu (a následně druhý sloupec k prvnímu) a potom čtvrtý řádek ke třetímu (a totéž se sloupce)). Vzniklá matice je maticí stejné bilineární formy vzhledem k jiné bázi, takže signatura je stejná. Hlavní subdeterminanty jsou

$$|A_1| = 2, \quad |A_2| = -1, \quad |A_3| = 8, \quad |A_4| = 16,$$

kde poslední dva subdeterminanty lze snadno spočítat rozvojem podle řádku nebo sloupce.

Takže

$$|A_1| > 0, \quad |A_1||A_2| < 0, \quad |A_2||A_3| < 0, \quad |A_3||A_4| > 0$$

a signatura je $(0, 2, 2)$.

Příklad 4. Uvažujme bilineární formu $f : \mathbb{Z}_5^4 \times \mathbb{Z}_5^4 \rightarrow \mathbb{Z}_5$, jejíž matice vzhledem ke kanonické bázi je

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

- Najděte vrchol f .
- Najděte bázi B nějakého doplňku nalezeného vrcholu a určete matici $g = f|_{\langle B \rangle}$ vzhledem k B .
- Najděte polární bázi g (**nepoužívejte metodu symetrických úprav**).
- Najděte polární bázi P bilineární formy f . Určete matici f vzhledem k P , hodnotu a nulitu f .

Řešení.

(a) Vrchol je řešením homogenní soustavy rovnic s maticí A :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$V(f) = \langle (0, 1, 1, 0) \rangle.$$

(b) Lze volit například

$$B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\} = \{(1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\},$$

protože se snadno vidí, že tyto tři vektory spolu s $(0, 1, 1, 0)$ tvoří bázi $\mathbb{Z}_5^4$.

Matice g vzhledem k B má na pozici i, j hodnotu $f(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j) = \mathbf{b}_i A \mathbf{b}_j^T$:

$$[g]_B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c) Zvolíme $\{\mathbf{p}_1\}_B = (1, 0, 0)$, pro tento vektor platí $g_2(\mathbf{p}_1) = 3 (= f_2(\mathbf{p}_1))$.
Je $\{f(\mathbf{p}_1, -)\}_B = (1, 0, 0)[g]_B = (3, 3, 2)$, takže

$$\{\ker f(\mathbf{p}_1, -)\}_B = \langle (1, 0, 1), (4, 1, 0) \rangle.$$

Zvolíme $\{\mathbf{p}_2\}_B = (1, 0, 1)$, což je šťastná volba, protože $g_2(\mathbf{p}_2) = (1, 0, 1)[g]_B(1, 0, 1)^T = (0, 2, 4)(1, 0, 1)^T = 4$. Řešením soustavy rovnic určíme $\ker f(\mathbf{p}_1, -) \cap \ker f(\mathbf{p}_2, -)$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\{\ker f(\mathbf{p}_1, -) \cap \ker f(\mathbf{p}_2, -)\}_B = \langle (3, 3, 1) \rangle.$$

Volíme $\{\mathbf{p}_3\}_B = (3, 3, 1)$ a spočítáme $g_2(\mathbf{p}_3) = 2$.

Polární báze g je např. $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\} = \{(1, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 1), (3, 0, 3, 1)\}$.

(d) Přidáme-li k polární bázi g bázi vrcholu f , získáme polární bázi P . Lze tedy volit např.

$$\begin{aligned} P &= \{(1, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 1), (3, 0, 3, 1), (0, 1, 1, 0)\} \\ [f]_P &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ n(f) &= 1 \\ h(f) &= 3 \end{aligned}$$

Příklad 5. Uvažujme vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ v unitárním prostoru $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem.

$$\mathbf{v}_1 = (2, 1, -2), \mathbf{v}_2 = (0, 1, -1), \mathbf{v}_3 = (0, -2, 0).$$

- (a) Najděte ortogonální bázi $\mathbf{o}_1, \mathbf{o}_2, \mathbf{o}_3$ prostoru $\mathbb{R}^3$ takovou, že $\langle \mathbf{o}_1, \dots, \mathbf{o}_i \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i \rangle$ pro $i = 1, 2, 3$.
- (b) Najděte ortonormální bázi $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ takovou, že $\mathbf{n}_i \in \langle \mathbf{o}_i \rangle$, $i = 1, 2, 3$.
- (c) Určete ortogonální projekci vektoru $\mathbf{v}_3$ na prostor $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$.
- (d) Určete ortogonální doplněk prostoru $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ v prostoru $\mathbb{R}^3$.

Řešení.

- (a) Postupujeme Gram-Schmidtovou ortogonalizací

$$\begin{aligned} \mathbf{o}_1 &= \mathbf{v}_1 = (2, 1, -2) \\ \mathbf{o}'_2 &= \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \mathbf{o}_1}{\mathbf{o}_1 \mathbf{o}_1} \mathbf{o}_1 = (0, 1, -1) - \frac{1}{3}(2, 1, -2) = \frac{1}{3}(-2, 2, -1) \\ \mathbf{o}_2 &= (2, -2, 1) \\ \mathbf{o}'_3 &= \mathbf{v}_3 - \left(\frac{\mathbf{v}_3 \mathbf{o}_1}{\mathbf{o}_1 \mathbf{o}_1} \mathbf{o}_1 + \frac{\mathbf{v}_3 \mathbf{o}_2}{\mathbf{o}_2 \mathbf{o}_2} \mathbf{o}_2 \right) \\ &= (0, -2, 0) - \left(-\frac{2}{9}(2, 1, -2) + \frac{4}{9}(2, -2, 1) \right) = \\ &= (0, -2, 0) - \frac{2}{9}(2, -5, 4) = \frac{4}{9}(-1, -2, -2) \\ \mathbf{o}_3 &= (1, 2, 2) \end{aligned}$$

- (b)

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_1 &= \frac{\mathbf{o}_1}{\|\mathbf{o}_1\|} = \frac{1}{3}(2, 1, -2) \\ \mathbf{n}_2 &= \frac{\mathbf{o}_2}{\|\mathbf{o}_2\|} = \frac{1}{3}(2, 2, -1) \\ \mathbf{n}_3 &= \frac{\mathbf{o}_3}{\|\mathbf{o}_3\|} = \frac{1}{3}(1, 2, 2) \end{aligned}$$

- (c) Ortogonální projekce $\mathbf{v}_3$ na $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{o}_1, \mathbf{o}_2 \rangle$ je

$$\frac{\mathbf{v}_3 \mathbf{o}_1}{\mathbf{o}_1 \mathbf{o}_1} \mathbf{o}_1 + \frac{\mathbf{v}_3 \mathbf{o}_2}{\mathbf{o}_2 \mathbf{o}_2} \mathbf{o}_2,$$

což jsme počítali výše. Vyšlo nám

$$\frac{2}{9}(2, -5, 4).$$

- (d) Vektor $\mathbf{o}_3$ je kolmý na $\mathbf{o}_1$ i $\mathbf{o}_2$, takže $\mathbf{o}_3$ leží v ortogonálním doplňku $\langle \mathbf{o}_1, \mathbf{o}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$. Protože hledaný doplněk má dimenzi 1 (doplněk dimenze $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ do dimenze celého prostoru), je hledaný ortogonální doplněk $\langle \mathbf{o}_3 \rangle = \langle (1, 2, 2) \rangle$.