Řešení domácích úkolů na lineární algebru 08/09 léto

Příklad 1. Uvažujme podprostor $V = \langle (1,1,1),(1,2,3) \rangle$ prostoru $\mathbb{R}^3$. Určete matici bilineární formy f na prostoru V vzhledem k bázi C (tj. matici $[f]_C$), víte-li, že

$$\begin{aligned} B &= \{(2,2,2),(2,3,4)\}, \\ C &= \{(-1,-2,-3),(3,5,7)\}, \\ [f]_B &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Řešení. Z přednášky (nebo ze cvičení) víme, že

$$[f]_C = [id]_{CB}^T [f]_B [id]_{CB}.$$

K určení $[id]_{CB}$ (tj. matice přechodu od B k C) potřebujeme $\{(1,-2,-3)\}_C$ a $\{(3,5,7)\}_C$. To vede na dvě soustavy rovnic, které současně vyřešíme:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 5 \\ 2 & 4 & -3 & 7 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{array} \right).$$

Dopočtením řešení zjistíme, že $\{-1,-2,-3\}_C = (\frac{1}{2} -1)$ a $\{(3,5,7)\}_C = (-\frac{1}{2}, 2)$. Tedy

$$[id]_{CB} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

a hledaná matice je

$$[f]_C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 10 & -24 \\ -16 & 42 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ -8 & 21 \end{pmatrix}.$$

Příklad 2. Matice bilineární formy $f : \mathbb{Z}_5^4 \times \mathbb{Z}_5^4 \to \mathbb{Z}_5$ vzhledem ke kanonické bázi je

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Najděte nějakou polární bázi P formy f, určete matici a analytické vyjádření f vzhledem k P, určete vrchol, nulitu a hodnost f.

Řešení. Zvolíme $\mathbf{p}_1 \in \mathbb{Z}_5^4$ tak, aby $f_2(\mathbf{p}_1) \neq 0$. Například $\mathbf{p}_1 = (1,0,0,0)$ a $f_2(\mathbf{p}_2) = (1,0,0,0)A(1,0,0,0)^T = 1$.

Vektor $\mathbf{p}_2$ hledáme v $\ker f(\mathbf{p}_1, \_)$ tak, aby $f_2(\mathbf{p}_2) \neq 0$. Matice lineární formy $f(\mathbf{p}_1, \_)$ vzhledem ke kanonické bázi je $(1,0,0,0)A = (1,2,3,2)$, takže

$$\ker f(\mathbf{p}_1, \_) = \langle (3,0,0,1), (2,0,1,0), (3,1,0,0) \rangle.$$

(To zjistíme vyřešením "soustavy" rovnic s maticí $(1,2,3,2)$.) Protože $f_2(3,0,0,1) = 0$, zkusíme $\mathbf{p}_2 = (2,0,1,0)$. Vyjde

$$f_2(\mathbf{p}_2) = (2,0,1,0) \cdot A \cdot (2,0,1,0)^T = (0,3,4,0) \cdot (2,0,1,0)^T = 4.$$

(Pokud by bylo $f_2(2,0,1,0) = 0$, zkusili bychom $(3,1,0,0)$. Pokud by ani tento pokus nevyšel, museli bychom ještě zkusit součty dvojic vektorů báze $\ker f(\mathbf{p}_1, \_)$.)

Vektor $\mathbf{p}_3$ hledáme v průniku $\ker f(\mathbf{p}_1, \_)$ a $\ker f(\mathbf{p}_2, \_)$, opět aby $f_2(\mathbf{p}_3) \neq 0$. Matice $f(\mathbf{p}_2, \_)$ vzhledem ke kanonické bázi je $(2,0,1,0)A = (0,3,4,0)$. Řešením homogenní soustavy rovnic

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

zjistíme, že

$$\ker f(\mathbf{p}_1, \_) \cap \ker f(\mathbf{p}_2, \_) = \langle (3,0,0,1), (3,2,1,0). \rangle$$

Již víme, že $f_2(3,0,0,1) = 0$, takže zkusíme vektor $\mathbf{p}_3 = (3,2,1,0)$. Je $f_2(\mathbf{p}_3) = (0,3,0,0)(3,2,1,0)^T = 1$.

Vektor $\mathbf{p}_4$ hledáme v průniku $\ker f(\mathbf{p}_1, \_)$, $\ker f(\mathbf{p}_2, \_)$ a $\ker f(\mathbf{p}_3, \_)$. Řešením homogenní soustavy rovnic

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

získáme

$$\ker f(\mathbf{p}_1, \_) \cap \ker f(\mathbf{p}_2, \_) \cap \ker f(\mathbf{p}_3, \_) = \langle (3,0,0,1) \rangle.$$

Protože $f_2(3,0,0,1) = 0$, dostali jsme se do vrcholu. Polární bázi P tvoří vektory $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ a báze vrcholu (tj. např. $(3,0,0,1)$).

$$\begin{aligned} V(f) &= \langle (3,0,0,1) \rangle \\ n(f) &= 1 \\ h(f) &= 3 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P &= \{(1,0,0,0),(2,0,1,0),(3,2,1,0),(3,0,0,1)\}\\
[f]_P &= \begin{pmatrix} f_2(1,0,0,0) & 0 & 0 & 0\\ 0 & f_2(2,0,1,0) & 0 & 0\\ 0 & 0 & f_2(3,2,1,0) & 0\\ 0 & 0 & 0 & f_2(3,0,0,1)\end{pmatrix} =\\
&\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\\
f(\mathbf{u},\mathbf{v}) &= x_1y_1 + 4x_2y_2 + x_3y_3 \text{ (analytické vyjádření vzhledem k } P)
\end{aligned}
$$

Příklad 3. Matice endomorfismu $f : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^3$ vzhledem k bázím $B = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ a B je

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2\\ 4 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 4\end{pmatrix}.$$

Určete vlastní čísla f a příslušné vlastní vektory (vyjádřené vzhledem ke kanonické bázi).

Řešení. Jak bylo odvozeno na cvičení, λ je vlastní číslo právě tehdy, když $\det(A-\lambda E) = 0$. Příslušné vlastní vektory vyjádřené v bázi B pak jsou řešením homogenní soustavy rovnic s maticí $A - \lambda E$.

Spočítáme determinant matice $A - \lambda E$:

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 2\\ 4 & 1-\lambda & 1\\ 2 & 0 & 4-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2\\ 2 & 4-\lambda\end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\left((4-\lambda)(4-\lambda)-4\right) = (1-\lambda)(12-8\lambda+\lambda^2) = (1-\lambda)(2-\lambda)(6-\lambda) = $$
$$= (1-\lambda)^2(2-\lambda)$$

Použili jsme rozvoj podle prostředního sloupce. Pokud Vám přijde podezřelá poslední úprava, podívejte se v jakém počítáme tělese.

Vlastní čísla jsou 1 a 2. Nyní určíme vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu 1.

$$A - 1E = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2\\ 4 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešením je podprostor $\langle (1,0,1),(0,1,0)\rangle$. Nenulové prvky tohoto podprostoru jsou vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu 1 **vyjádřené v bázi** B. Příslušné vlastní vektory jsou tedy

$$\langle 1\cdot(1,1,1) + 1\cdot(1,0,0), 1\cdot(1,1,0)\rangle - \{(0,0,0)\} = \langle (2,1,1),(1,1,0)\rangle - \{0,0,0\}.$$

Nakonec určíme vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu 2.

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešením soustavy je $\langle(4, 2, 1)\rangle$ a vlastní vektory příslušně vlastnímu číslu 2 jsou

$$\langle 4 \cdot (1, 1, 1) + 2 \cdot (1, 1, 0) + 1 \cdot (1, 0, 0)\rangle - \{(0, 0, 0)\} = \langle(2, 1, 4)\rangle - \{0, 0, 0\}.$$

Příklad 4. Najděte polární bázi bilineární formy z 2. příkladu metodami II a III ze cvičení (metoda II - vrchol, restrikce na doplněk a zbytek jak u 1. metody; metoda III - symetrické úpravy.)

Řešení.

Metoda II

Nejprve určíme vrchol.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vrchol je

$$V(f) = \langle(3, 0, 0, 1)\rangle$$

a $h(f) = 3, n(f) = 1$.

Bázi vrcholu doplníme na bázi celého prostoru například vektory $\mathbf{b}_1 = (0, 1, 0, 0), \mathbf{b}_2 = (0, 0, 1, 0), \mathbf{b}_3 = (0, 0, 0, 1)$. Označíme $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ a $D = \langle B\rangle$ (D je doplněk vrcholu, B je jeho báze). Matice bilineární formy $g = f|D$ vzhledem k B je

$$Q = \begin{pmatrix} g_2(\mathbf{b}_1) & g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) & g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_3) \\ g(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1) & g_2(\mathbf{b}_2) & g(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) \\ g(\mathbf{b}_3, \mathbf{b}_1) & g(\mathbf{b}_3, \mathbf{b}_2) & g_2(\mathbf{b}_3) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} f_2(\mathbf{b}_1) & f(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) & f(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_3) \\ f(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1) & f_2(\mathbf{b}_2) & f(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) \\ f(\mathbf{b}_3, \mathbf{b}_1) & f(\mathbf{b}_3, \mathbf{b}_2) & f_2(\mathbf{b}_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Zvolíme libovolný vektor $\mathbf{p}_1 \in D$, pro který $g_2(\mathbf{p}_1) \neq 0$. Např. $\{\mathbf{p}_1\}_B = (1, 0, 0)$ a $g_2(\mathbf{p}_1) = \{\mathbf{p}_1\}_B Q \{\mathbf{p}_1\}_B^T = (1, 0, 0) Q (1, 0, 0)^T = 4$.

Vektor $\mathbf{p}_2 \in D$ hledáme v $\ker g(\mathbf{p}_1, \_)$ tak, aby $g_2(\mathbf{p}_2) \neq 0$. Matice lineární formy $g(\mathbf{p}_1, \_)$ vzhledem k B je $(1, 0, 0)A = (4, 4, 4)$, takže

$$\{\ker f(\mathbf{p}_1, \_)\}_B = \langle(4, 0, 1), (4, 1, 0)\rangle.$$

(To zjistíme vyřešením "soustavy" rovnic s maticí $(4,4,4)$.) Zkusíme $\{\mathbf{p}_2\}_B = (4,0,1)$, vyjde $g_2(\mathbf{p}_2) = \{\mathbf{p}_2\}_B Q \{\mathbf{p}_2\}_B^T = (4,0,1)Q(4,0,1)^T = 0$, takže tento vektor nevyhovuje. Zkusíme tedy $\{\mathbf{p}_2\}_B = (4,1,0)$, vyjde $g_2(\mathbf{p}_2) = (4,1,0)Q(4,1,0)^T = (0,4,2)(4,1,0)^T = 4$. (Kdyby ani toto nevyšlo, pak vezmeme $\{\mathbf{p}_2\}_B = (4,1,0) + (4,0,1)$, to už by vyjít muselo, protože g je regulární.)

Vektor $\mathbf{p}_3$ hledáme v $\ker g(\mathbf{p}_1, \_) \cap \ker g(\mathbf{p}_2, \_)$. Hledaný průnik vyjádřený v bázi B nalezneme řešením soustavy lineárních rovnic

$$\begin{pmatrix} \{\ker g(\mathbf{p}_1, \_)\}_B \\ \{\ker g(\mathbf{p}_2, \_)\}_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešením je $\langle 2,2,1 \rangle$. Zvolíme $\mathbf{p}_3 = (2,2,1)$ a spočítáme $g_2(\mathbf{p}_3) = (2,2,1)Q(2,2,1)^T = (0,0,4)(2,2,1)^T = 4$.

Polární bázi g tvoří vektory $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$. Protože $\{\mathbf{p}_1\}_B = (1,0,0)$, je $\mathbf{p}_1 = 1 \cdot (0,1,0,0) + 0 \cdot (0,0,1,0) + 0 \cdot (0,0,0,1)$. Podobně $\mathbf{p}_2 = (0,4,1,0)$, $\mathbf{p}_3 = (0,2,2,1)$.

Polární bázi f získáme přidáním báze vrcholu. Tedy

$$P = \{(3,0,0,1), (0,1,0,0), (0,4,1,0), (0,2,2,1)$$

je polární báze f. Matice f vzhledem k P má na diagonále prvky $f_2(3,0,0,1) = 0$, $f_2(0,1,0,0) = 4$, $f_2(0,4,1,0) = 4$, $f_2(0,2,2,1) = 4$.

Metoda III

Symetrickými úpravami matice $(A|E)$ získáme

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

V první úpravě jsme řádkovými úpravami vyeliminovali první sloupec, následně jsme provedli odpovídající úpravy na sloupce. V třetí úpravě jsme trojnásobek třetího řídku přičetli k druhému a pak jsme provedli stejnou úpravu na sloupce.

V řádcích matice vpravo je polární báze

$$P = \{(1,0,0,0), (4,1,3,0), (2,0,1,0), (3,0,0,1)$$

bilineární formy f, vlevo pak matice f vzhledem k P. Vidíme též, že $V(f) = \langle (3,0,0,1) \rangle$, $h(f) = 3$, $n(f) = 1$.

Příklad 5. Najděte nejlepší přibližné řešení následující soustavy rovnic nad $\mathbb{R}$ metodou nejmenších čtverců

$$\begin{aligned} x+y &= 0 \\ x+3z &= 0 \\ y &= 0 \\ x+y+z &= 1 \end{aligned}$$

Tj. najděte x, y, z pro která má vektor $(x+y, x+3z, y, x+y+z)$ nejmenší vzdálenost od $(0,0,0,1)$.

Řešení. Hledáme x, y, z tak, aby vektor $(x+y, x+3z, y, x+y+z) = x(1,1,0,1)+ y(1,0,1,1) + z(0,3,0,1)$ měl co nejmenší vzdálenost od $(0,0,0,1)$. To nastane právě tehdy, když je vektor $\mathbf{u} = (0,0,0,1)-[x(1,1,0,1) + y(1,0,1,1) + z(0,3,0,1)]$ kolmý na podprostor $\langle(1,1,0,1),(1,0,1,1),(0,3,0,1)\rangle$ (k tomu stačí, aby vektor $\mathbf{u}$ byl kolmý na vektory báze tohoto podprostoru). To lze dělat více způsoby.

1. způsob. Gram-Schmidtovou ortogonalizací určíme ortogonální bázi prostoru $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\rangle = \langle(1,1,0,1),(1,0,1,1),(0,3,0,1)\rangle$.

$$\begin{aligned} \mathbf{o}_1 &= \mathbf{v}_1 = (1,1,0,1) \\ \mathbf{o}_2' &= \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2\mathbf{o}_1}{\mathbf{o}_1\mathbf{o}_1}\mathbf{o}_1 = (1,0,1,1) - \frac{2}{3}(1,1,0,1) = \frac{1}{3}(1,-2,3,1) \\ \mathbf{o}_2 &= (1,-2,3,1) \\ \mathbf{o}_3' &= \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{v}_3\mathbf{o}_1}{\mathbf{o}_1\mathbf{o}_1}\mathbf{o}_1 - \frac{\mathbf{v}_3\mathbf{o}_2}{\mathbf{o}_2\mathbf{o}_2}\mathbf{o}_2 \\ &= (0,3,0,1) - \frac{4}{3}(1,1,0,1) + \frac{5}{15}(1,-2,3,1) = (-3,3,3,0) \\ \mathbf{o}_3 &= (-1,1,1,0) \end{aligned}$$

Označme $\mathbf{w} = x(1,1,0,1) + y(1,0,1,1) + z(0,3,0,1)$. Protože $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\rangle = \langle \mathbf{o}_1, \mathbf{o}_2, \mathbf{o}_3\rangle$, lze vektor $\mathbf{w}$ vyjádřit jako $a\mathbf{o}_1 + b\mathbf{o}_2 + c\mathbf{o}_3$ pro nějaká $a, b, c \in \mathbb{R}$. Z toho, že $(0,0,0,1) - \mathbf{w}$ je kolmý na $\mathbf{o}_1$, dostáváme

$$\begin{aligned} [(0,0,0,1) - a\mathbf{o}_1 - b\mathbf{o}_2 - c\mathbf{o}_3]\,\mathbf{o}_1 &= 0 \\ (0,0,0,1)\mathbf{o}_1 - a\mathbf{o}_1\mathbf{o}_1 &= 0 \\ a &= \frac{(0,0,0,1)(1,1,0,1)}{(1,1,0,1)(1,1,0,1)} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Podobně, využitím kolmosti na $\mathbf{o}_2$ získáme $b = \frac{1}{15}$ a pomocí kolmosti na $\mathbf{o}_3$ dostaneme $c = 0$. (Vlastně jsem zopakovali odovození koeficientů při Gramm-Schmitově orogonalizaci.) Takže

$$\mathbf{w} = \frac{1}{3}(1,1,0,1) + \frac{1}{15}(1,-2,3,1) = \frac{1}{15}(6,3,3,6) = \frac{1}{5}(2,1,1,2)$$

Vyřešením soustavy $\frac{1}{5}(2,1,1,2) = x(1,1,0,1)+y(1,0,1,1)+z(0,3,0,1)$ získáme $(x,y,z) = (\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, 0)$.

2. způsob. Přímo z toho, že vektor $(1,0,0,1) - x(1,1,0,1) - y(1,0,1,1) - z(0,3,0,1)$ má být kolmý na vektory $(1,1,0,1),(1,0,1,1),(0,3,0,1)$ získáme soustavu třech rovnic o třech neznámých, kterou vyřešíme. Obecně, nejlepší přibiližné řešení soustavy $A\mathbf{x}^T = \mathbf{b}^T$ metodou nemenších čtverců je (přesné) řešení soustavy $A^TA\mathbf{x}^T = A^T\mathbf{b}^T$. Pokud jste nebyli na cvičení, odvoďte!

Příklad 6. 21.4. resp. 23.4.

(a) Zjistěte, zda jsou přímky $p = (1,2,-1) + \langle(1,-1,1)\rangle$ a $q = (0,9,-2) + \langle(1,0,0)\rangle$ mimoběžné. Pokud ano, najděte jejich příčku ve směru $\langle(1,2,0)\rangle$.

(b) Najděte příčku přímek $p = (3,3,3) + \langle(2,2,1)\rangle$ a $q = (0,5,-1) + \langle(1,1,1)\rangle$ procházející bodem $(4,5,3)$ (pokud existuje).

Řešení. Uvádím jen náznak řešení.

(a) Přímky $p = a + \langle\mathbf{u}\rangle$ a $q = b + \langle\mathbf{v}\rangle$ jsou mimoběžné právě tehdy, když jsou vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, b - a$ lineárně nezávislé.

   Jeden z vektorů na příčce ve směru $\langle\mathbf{w}\rangle$ nalezneme jako průnik roviny $\rho = a + \langle\mathbf{u},\mathbf{w}\rangle$ a přímky q. Tento průnik se nejlépe hledá, popíšeme-li rovinu ρ rovnicově a pro přímku q použijeme parametrické vyjádření.

(b) Jeden z bodů ležící na hledané příčce přímek $p = a + \langle\mathbf{u}\rangle$ a $q = b + \langle\mathbf{v}\rangle$ procházející bodem $c = (4,5,3)$ nalezneme jako průnik roviny ρ obsahující přímku p a bod c (tedy $\rho = a + \langle\mathbf{u}, c - a\rangle$) a přímky q.

Příklad 7. Určete kolineaci K projektivního rozšíření afinního prostoru $\mathbb{R}^3$ tak, aby platilo $K((0,0,0)) = (0,0,0)$, $K(\langle\langle(2,3,1)\rangle\rangle) = \langle(1,0,2)\rangle$, $K(\langle\langle(0,0,1)\rangle\rangle) = \langle(0,0,1)\rangle$ a $K \circ K = Id$.

Řešení. Označme f automorfismus projektivního rozšíření $P(V)$ affinního prostoru $\mathbb{R}^3$, která vytváří kolineaci K. V prostoru P budeme pracovat v aritmetické bázi indukované afinní soustavou souřadnic $\{(0,0),(1,0),(0,1)\}$. V této bázi je $V = \mathbb{R}^4$ a f je tedy automorfismus $\mathbb{R}^4$.

Afinní bod $(0,0,0)$ je v homogenních souřadnicích roven $\langle(1,0,0,0)\rangle$, tedy první podmínka říká $K(\langle\langle(1,0,0,0)\rangle\rangle) = \langle(1,0,0,0)\rangle$, čili

$$f((1,0,0,0)) = \alpha(1,0,0,0), \qquad 0 \neq \alpha \in \mathbb{R}.$$

Libovolný nenulový násobek f vytváří stejnou kolineaci, takže můžeme předpokládat

$$f((1,0,0,0)) = (1,0,0,0).$$

Nevlastní bod $\langle(2,3,1)\rangle$ je v homogenních souřadnicích bodem $\langle(0,2,3,1)\rangle$ (a podobně pro ostatní body), takže druhá podmínka říká

$$f((0,2,3,1)) = \beta(0,1,0,2), \qquad 0 \neq \beta \in \mathbb{R},$$

podobně třetí podmínka se ekvivalentně přepíše jako

$$f((0,0,0,1)) = \gamma(0,0,0,1), \qquad 0 \neq \gamma \in \mathbb{R}.$$

Z požadavku $K \circ K = Id$ a $K(\langle(2,3,1)\rangle) = \langle(1,0,2)\rangle$ plyne $K(\langle(1,0,2)\rangle) = \langle(2,3,1)\rangle$, neboli

$$f((0,1,0,2)) = \delta(0,2,3,1), \qquad 0 \neq \delta \in \mathbb{R}.$$

Označme

$$B = \{(0,0,0,1),(0,1,0,2),(0,2,3,1),(0,0,0,1)\}.$$

Snadno nahlédneme, že B je báze. Matice f vzhledem k B (obšírněji, matice f vzhledem k bázím B a B) je podle odvozených vztahů rovna

$$[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

Kolineace vytvořená libovolným homomorfismem tohoto tvaru splňuje první tři požadavky. Snadno nahlédneme, že podmínka $K \circ K = Id$ je ekvivalentní podmínce, že $f \circ f$ je (nenulový) násobek identického automorfismu. Maticově řečeno, matice $[f \circ f]_B$ je násobkem jednotkové matice. Spočteme $[f \circ f]_B$:

$$[f \circ f]_B = [f]_B \cdot [f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta\delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma^2 \end{pmatrix}$$

Tedy k tomu, aby $K \circ K = Id$ je nutné a stačí, aby $\beta\delta = 1, \gamma^2 = 1$.

Shrnutí: Kolineace vytvořené automorfismem f, jehož matice vzhledem k B je

$$[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix},$$

kde $\beta, \delta, \gamma \neq 0$ a $\beta\delta = 1$, $\gamma^2 = 1$, jsou právě kolineace splňující požadované podmínky. Jako cvičení si určete matici f vzhledem k původní bázi.

Příklad 8. K afinní kvadrice $x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x + y + 3 = 0$ veďte tečny rovnoběžné s přímkou $3x - 2y + 10 = 0$.

Řešení. Označme f' příslušnou symetrickou bilineární formu, její matice (vzhledem k indukované aritmetické bázi) je

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Abychom se vyhli počítání se zlomky, budeme raději pracovat s formu $f = 2f'$ (která určuje tutéž kvadriku). Její matice je

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Snadno ověříme, že f je regulární.

Směr dané přímky je zřejmě $\langle(2,3)\rangle$. Tečny rovnoběžné s touto přímkou jsou právě tečny procházející nevlastním bodem $\langle \mathbf{u} \rangle = \langle(0,2,3)\rangle$. Body dotyku určíme jako průsečík poláry bodu $\langle \mathbf{u} \rangle$ s kvadrikou. Matice formy $f(\mathbf{u}, \_)$ je

$$(0,2,3)A = (7,-2,8),$$

takže polára má v homogenních souřadnicích rovnici

$$7x_0 - 2x_1 + 8x_2 = 0.$$

V afinních souřadnicích je to přímka o rovnici

$$7 - 2x + 8y = 0.$$

Nyní určíme průsečík této přímky s kvadrikou (dosazením $2x = 7+8y$ do rovnice kvadriky):

$$\begin{aligned}
0 &= x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x + y + 3 \\
0 &= 4x^2 - 8xy + 8y^2 + 8x + 4y + 12 \\
0 &= (7+8y)^2 - 4(7+8y)y + 8y^2 + 4(7+8y) + 4y + 12 \\
0 &= 40y^2 + 120y + 89 \\
y_{1,2} &= \frac{-30 \pm \sqrt{10}}{20}
\end{aligned}$$

Takže

$$x_{1,2} = \frac{-25 \pm 2\sqrt{10}}{10}$$

Uvažujme nejprve jeden z bodů dotyku, např. $t_1 = (x,y) = \left(\frac{-25+2\sqrt{10}}{10}, \frac{-30+\sqrt{10}}{20}\right)$. V homogenních souřadnicích jde o bod

$$\langle \mathbf{t}_1 \rangle = \left\langle \left(1, \frac{-25+2\sqrt{10}}{10}, \frac{-30+\sqrt{10}}{20}\right) \right\rangle.$$

Matice formy $f(\mathbf{t_1}, \_)$ je

$$\left(1, \frac{-25+2\sqrt{10}}{10}, \frac{-30+\sqrt{10}}{20}\right) A = \frac{\sqrt{10}}{20}\left(-\sqrt{10}+9, 6, -4\right).$$

Rovnice tečny z bodu t_1 je tedy

$$(-\sqrt{10}+9)x_0 + 6x_1 - 4x_2 = 0$$

a v afinních souřadnicích

$$-\sqrt{10}+9+6x-4y = 0.$$

(Všimněte si, že tečna je opravdu rovnoběžná s danou přímkou.)

Druhá tečna se vypočte obdobně, vyjde

$$\sqrt{10}-9+6x-4y = 0.$$

Příklad 9. Proveďte metrickou klasifikaci kvadriky v $\mathbb{R}^3$

$$5x^2 - 16xy - 16xz - 7y^2 - 32yz - 7z^2 + 6x + 66y + 12z + 27 = 0$$

Řešení. Označme f příslušnou symetrickou bilineární formu, její matice (vzhledem k indukované aritmetické bázi) je

$$A = \begin{pmatrix} 27 & 3 & 33 & 6 \\ 3 & 5 & -8 & -8 \\ 33 & -8 & -7 & -16 \\ 6 & -8 & -16 & -7 \end{pmatrix}$$

Označme

$$N = \{(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\} \quad \text{a } g = f|\langle N\rangle,$$

tj. N je (ortonormální) báze nevlastní nadroviny a g je zúžení f na nevlastní nadrovinu. Matice g vzhledem k N je

$$[g]_N = B = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -8 \\ -8 & -7 & -16 \\ -8 & -16 & -7 \end{pmatrix}$$

Najdeme ortonormální polární bázi formy g. K tomu určíme vlastní čísla, příslušné prostory vlastních čísel a v nich ortonormální báze.

$$\begin{aligned} |B-\lambda E| &= \begin{vmatrix} 5-\lambda & -8 & -8 \\ -8 & -7-\lambda & -16 \\ -8 & -16 & -7-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (5-\lambda)(7+\lambda)(7+\lambda) - 1024 - 1024 - 256(5-\lambda) + 64(7+\lambda) + 64(7+\lambda) = \\ &= -\lambda^3 - 9\lambda^2 + 405\lambda - 2187 = -(\lambda-9)^2(\lambda+27) \end{aligned}$$

Vlastní čílsa jsou 9 a -27. Z toho plyne, že se jedná o středovou kvadriku (pokud je ovšem kvadrika regulární, což zjistíme později).

Podprostor V_9 (vyjádřený v bázi N) vlastních vektorů příslušných vlastnímu číslu 9 je řešením homogenní soustavy rovnic s maticí $A - 9E$:

$$\begin{pmatrix} -4 & -8 & -8 \\ -8 & -16 & -16 \\ -8 & -16 & -16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Tedy $\{V_9\}_N = \langle(-2, 1, 0), (-2, 0, 1)\rangle$ a

$$V_9 = \langle(0, -2, 1, 0), (0, -2, 0, 1)\rangle.$$

Ortogonální bázi V_9 bychom mohli nalézt Gramm-Schmidtovou ortogonalizací, vyšli by vektory $(0, -2, 1, 0), (0, -2, -4, 5)$. Aby se nám lépe počítali, zvolíme odhadem „hezčí“ bázi $(0, 2, 1, -2), (0, 2, -2, 1)$ (nahlédněte, že se skutečně jedná o bázi!). Znormováním dostaneme ortonoromální bázi $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{3}(0, 2, 1, -2), \qquad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{3}(0, 2, -2, 1).$$

Teď vypočteme podprostor V_{-27} a jeho ortonormální bázi.

$$\begin{pmatrix} 32 & -8 & -8 \\ -8 & 20 & -16 \\ -8 & -16 & 20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 2 & 4 & -5 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 0 & 9 & -9 \\ 0 & 9 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 0 & 9 & -9 \end{pmatrix}$$

Tedy $\{V_{-28}\}_N = \langle(1, 2, 2)\rangle$, $V_{-28} = \langle(0, 1, 2, 2)\rangle$. Ortonormální bázi tvoří vektor $\mathbf{v}_3$:

$$\mathbf{v}_3 = \frac{1}{3}(0, 1, 2, 2).$$

Nalezneme střed (ze cvičení víme, že je to řešení homogenní soustavy rovnic s maticí A bez prvního řádku):

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -8 & -8 \\ 33 & -8 & -7 & -16 \\ 6 & -8 & -16 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 5 & -8 & -8 \\ 0 & -63 & 81 & 72 \\ 0 & -18 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Řešením je $\langle(1, 1, -1, 2)\rangle$. Tedy středem je afinní bod $a = (1, -1, 2)$, v homogenních souřadnicích $\mathbf{a} = (1, 1, -1, 2)$.

K určení matice f vzhledem k bázi $\bar{S} = \{\mathbf{a}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ ještě potřebujeme spočítat $f_2(\mathbf{a}), f_2(\mathbf{v}_1), \ldots,$:

$$\begin{aligned}
f_2(\mathbf{a}) &= (1, 1, -1, 2)A(1, 1, -1, 2)^T = (9, 0, 0, 0)(1, 1, -1, 2)^T = 9 \\
f_2(\mathbf{v_1}) &= \frac{1}{3}(0, 2, 1, -2)A\frac{1}{3}(0, 2, 1, -2)^T = \frac{1}{9}(27, 18, 9, -18)(0, 2, 1, -2)^T = 9 \\
f_2(\mathbf{v_2}) &= \frac{1}{3}(0, 2, -2, 1)A\frac{1}{3}(0, 2, -2, 1)^T = \frac{1}{9}(-54, 18, -18, 9)(0, 2, -2, 1)^T = 9 \\
f_2(\mathbf{v_3}) &= \frac{1}{3}(0, 1, 2, 2)A\frac{1}{3}(0, 1, 2, 2)^T = \frac{1}{9}(81, -27, -54, -54)(0, 1, 2, 2)^T = -27
\end{aligned}$$

(Není náhodna, že hodnoty pro vektory $\mathbf{v}_i$ jsou rovné příslušnému vlastnímu číslu. Je to tak vždy, rozmyslete si proč!)

Matice f vzhledem k $\bar{S}$ je tedy

$$[f]_{\bar{S}} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -27 \end{pmatrix}.$$

(Teď vidíme, že f je regulární.) Rovnice kvadriky vzhledem k $\bar{S}$ je proto

$$9x_0^2 + 9x_1^2 + 9x_2^2 - 27x_3^2 = 0.$$

Vzhledem k afinní soustavě souřadnic $S = \{(1, -1, 2), (2, 1, -2), (2, -2, 1), (1, 2, 2)\}$ má daná kvadrika rovnici

$$9 + 9x^2 + 9y^2 - 27z^2 = 0,$$

neboli

$$-x^2 - y^2 + 3z^2 = 1$$

a jedná se o rotační dvojdílný hyperboloid.

Příklad 10. Proveďte metrickou klasifikaci kvadriky v $\mathbb{R}^3$

$$4x^2 - 4xz + 2y^2 - 4yz + 3z^2 - 28x - 40y - 54z + 33 = 0$$

Řešení. Označme f příslušnou symetrickou bilineární formu, jejíž matice (vzhledem k indukované aritmetické bázi) je

$$A = \begin{pmatrix} 33 & -14 & -20 & -27 \\ -14 & 4 & 0 & -2 \\ -20 & 0 & 2 & -2 \\ -27 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Označme

$$N = \{(0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\} \text{ a } g = f|\langle N \rangle,$$

tj. N je (ortonormální) báze nevlastní nadroviny a g je zúžení f na nevlastní nadrovinu. Matice g vzhledem k N je

$$[g]_N = B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Najdeme ortonormální polární bázi formy g. K tomu určíme vlastní čísla, příslušné prostory vlastních čísel a v nich ortonormální báze.

$$\begin{aligned} |B-\lambda E| &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 2-\lambda & -2 \\ -2 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (4-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) - 4(4-\lambda) - 4(2-\lambda) = \\ &= -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 18\lambda = -\lambda(\lambda-3)(\lambda-6) \end{aligned}$$

Vlastní čísla jsou 0, 3 a 6. Z toho plyne, že se jedná o paraboloid (pokud je ovšem kvadrika regulární, což zjistíme později).

Podprostor V_3 (vyjádřený v bázi N) vlastních vektorů příslušných vlastnímu číslu 3 je řešením homogenní soustavy rovnic s maticí $A-3E$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Tedy $\{V_3\}_N = \langle(2,-2,1)\rangle$ a

$$V_3 = \langle(0,2,-2,1)\rangle.$$

Ortonormální bázi V_3 tvoří vektor $\mathbf{v}_1$:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{3}(0,2,-2,1).$$

Podprostor V_6 je řešením homogenní soustavy rovnic s maticí $A-6E$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & -2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tedy $\{V_6\}_N = \langle(-2,-1,2)\rangle$ a

$$V_6 = \langle(0,-2,-1,2)\rangle.$$

Ortonormální bázi V_6 tvoří vektor $\mathbf{v}_2$:

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{3}(0,-2,-1,2).$$

Podprostor V_0 je řešením homogenní soustavy rovnic s maticí A:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tedy $\{V_0\}_N = \langle(1,2,2)\rangle$ a

$$V_0 = \langle(0,1,2,2)\rangle.$$

Ortonormální bázi V_0 tvoří vektor $\mathbf{v}_3$:

$$\mathbf{v}_3 = \frac{1}{3}(0, 1, 2, 2).$$

Směr osy paraboloidu je $\langle(1, 2, 2)\rangle$.

Ještě musíme spočítat vrchol paraboloidu – vektor $\mathbf{a} = (1, x, y, z)$, který splňuje $f(\mathbf{v}_1, \mathbf{a}) = 0$, $f(\mathbf{v}_2, \mathbf{a}) = 0$, $f(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0$. Z prvních dvou podmínek dostáváme

$$0 = (0, 2, -2, 1)A(1, x, y, z)^T = (-15, 6, -6, 3)(1, x, y, z)^T = -15 + 6x - 6y + 3z$$

$$0 = (0, -2, -1, 2)A(1, x, y, z)^T = (-6, -12, -6, 12)(1, x, y, z)^T = -6-12x-6y+12z$$

Po úpravě vyjde $z = 2x - 1, y = 2x - 3$. Poslední podmínka $f(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0$ říká, že bod $a = (x, 2x - 3, 2x - 1)$ leží na kvadrice. Dosazením získáme

$$4x^2-4x(2x-1)+2(2x-3)^2-4(2x-3)(2x-1)+3(2x-1)^2-28x-40(2x-3)-54(2x-1)+33 = 0$$

$$-216x = 216$$

Tedy $\mathbf{a} = (1, -1, -5, -3)$ a afinní bod $a = (-1, -5, -3)$ je vrchol paraboloidu.

Výpočtem zjistíme, že $f(\mathbf{a}, \mathbf{v}_3) = -108, f_2(\mathbf{v}_1) = 3$ a $f_2(\mathbf{v}_2) = 6$ (u posledních dvou rovností vyjdou vlastní čísla, v minulém příkladu jste si měli rozmyslet proč).

Matice f vzhledem k bázi $\bar{S} = \{\mathbf{a}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ je tedy

$$[f]_{\bar{S}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -108 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ -108 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Teď vidíme, že f je regulární.) Rovnice kvadriky vzhledem k $\bar{S}$ je proto

$$3x_1^2 + 6x_2^2 - 216x_0x_3 = 0.$$

Vzhledem k afinní soustavě souřadnic $S = \{(-1, -5, -3), (2, -2, 1), (-2, -1, 2), (1, 2, 2)\}$ má daná kvadrika rovnici

$$3x^2 + 6y^2 - 216z = 0,$$

neboli

$$2z = \frac{1}{60}x^2 + \frac{1}{30}y^2$$

a jedná se o eliptický paraboloid.