Domácí úkoly na lineární algebru 08/09 léto

Příklad 1. *Zadán 3.3. resp. 5.3.* Uvažujme podprostor $V = \langle(1,1,1),(1,2,3)\rangle$ prostoru $\mathbb{R}^3$. Určete matici bilineární formy f na prostoru V vzhledem k bázi C (tj. matici $[f]_C$), víte-li, že

$$\begin{aligned} B &= \{(2,2,2),(2,3,4)\}, \\ C &= \{(-1,-2,-3),(3,5,7)\}, \\ [f]_B &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Příklad 2. *Zadán 10.3. resp. 12.3.* Matice bilineární formy $f : \mathbb{Z}_5^4 \times \mathbb{Z}_5^4 \to \mathbb{Z}_5$ vzhledem ke kanonické bázi je

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Najděte nějakou polární bázi P formy f, určete matici a analytické vyjádření f vzhledem k P, určete vrchol, nulitu a hodnost f.

Příklad 3. *Zadán 17.3. resp. 19.3.* Matice endomorfismu $f : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^3$ vzhledem k bázím $B = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ a B je

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Určete vlastní čísla f a příslušné vlastní vektory (vyjádřené vzhledem ke kanonické bázi).

Tento příklad lze odevzdat o týden později, tedy současně se čtvrtým příkladem.

Příklad 4. *Zadán 24.3. resp. 26.3.* Najděte polární bázi bilineární formy z 2. příkladu metodami II a III ze cvičení (metoda II - vrchol, restrikce na doplněk a zbytek jak u 1. metody; metoda III - symetrické úpravy.)

Příklad 5. *Zadán 31.3. resp. 2.4.* Najděte nejlepší přibližné řešení následující soustavy rovnic nad $\mathbb{R}$ metodou nejmenších čtverců

$$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ x + 3z &= 0 \\ y &= 0 \\ x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

Tj. najděte x, y, z pro která má vektor $(x+y, x+3z, y, x+y+z)$ nejmenší vzdálenost od $(0,0,0,1)$.

Příklad 6.

(a) Zjistěte, zda jsou přímky $p = (1,2,-1) + \langle(1,-1,1)\rangle$ a $q = (0,9,-2) + \langle(1,0,0)\rangle$ mimoběžné. Pokud ano, najděte jejich příčku ve směru $\langle(1,2,0)\rangle$.

(b) Najděte příčku přímek $p = (3,3,3) + \langle(2,2,1)\rangle$ a $q = (0,5,-1) + \langle(1,1,1)\rangle$ procházející bodem $(4,5,3)$ (pokud existuje).

Příklad 7. Určete kolineaci K projektivního rozšíření afinního prostoru $\mathbb{R}^3$ tak, aby platilo $K((0,0,0)) = (0,0,0)$, $K(\langle(2,3,1)\rangle) = \langle(1,0,2)\rangle$, $K(\langle(0,0,1)\rangle) = \langle(0,0,1)\rangle$ a $K \circ K = Id$.

Příklad 8. K afinní kvadrice $x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x + y + 3 = 0$ veďte tečny rovnoběžné s přímkou $3x - 2y + 10 = 0$.