Příklady LA 2006, letní semestr

1. Máme bilineární formu $f : Z_7^5 \times Z_7^5 \to Z_7$ zadanou maticí A vzhledem ke kanonické bázi. Najděte vrchol, hodnost, nulitu, polární bázi P formy f, matici f vzhledem k P a analytické vyjádření f vzhledem k P. Použijte metodu „vrchol, restrikce na doplněk, hladový algoritmus…“.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 4 & 3 & 3 \\ 6 & 2 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

2. V unitárním prostoru (R^4, ω) máme vektory $\vec{v_1} = (1, 1, -1, -2), \vec{v_2} = (5, 8, -2, -3), \vec{v_3} = (3, 9, 3, 8)$.
   (a) Najděte ortogonální bázi $V = \langle \vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_2} \rangle$.
   (b) Najděte ortonormální bázi V.
   (c) Najděte nejlepší aproximaci $\vec{a}$ vektoru $\vec{e} = (1, 0, 0, 0)$ v prostoru V a jeho chybu.

3. (a) Určete vlastní čísla a příslušné vlastní podprostory pro reálnou matici $\begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 \\ 3{,}5 & 4 \end{pmatrix}$.
   (b) Popište rovnicemi následující podprostor afinního prostoru Z_2^5:
   $$(0, 0, 1, 0, 1) + \langle (1, 1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 1, 0), (1, 0, 1, 0, 1) \rangle.$$

4. V afinním prostoru R^3 jsou dány přímky $p = (3, 3, 3) + \langle (2, 2, 1) \rangle$ a $q = (0, 5, -1) + \langle (1, 1, 1) \rangle$.
   (a) Zjistěta zda jsou přímky p a q mimoběžné.
   (b) Pokud ano, najděte příčku p a q procházející bodem $(4, 5, 3)$ (pokud existuje).

5. Na R^3 máme skalární součin $\cdot$, jehož matice vzhledem ke k.b. je
   $$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Dále máme vektory $\vec{u} = (1, 4, 6)$, $\vec{v} = (2, 3, 2)$.
   (a) Spočtěte $\vec{u} \times \vec{v}$.
   (b) Spočtěte kosinus úhlu svíraného vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

6. Najděte kolineaci K projektivniho prostoru $P(R^4)$, aby
   $$K(\langle 1, 0, 0, 0 \rangle) = \langle 1, 0, 0, 0 \rangle,\ K(\langle 0, 2, 3, 1 \rangle) = \langle 0, 1, 0, 2 \rangle,\ K(\langle 0, 0, 0, 1 \rangle) = \langle 0, 0, 0, 1 \rangle,\ K^{-1} = K.$$
   Nápověda: Ze zadání plyne, že $K(\langle 0, 1, 0, 2 \rangle) = \langle 0, 2, 3, 1 \rangle$. Tedy pro homomorfismus f, který vytváří K platí $f(1, 0, 0, 0) = a(1, 0, 0, 0)$, $f(0, 2, 3, 1) = b(0, 1, 0, 2)$, $f(0, 1, 0, 2) = c(0, 2, 3, 1)$, $f(0, 0, 0, 1) = d(0, 0, 01)$ pro nějaká nenulová $a, b, c, d \in R$. Jeden parametr lze volit, např. $a = 1$. Napište matici A homomorfismu f vzhledem ke vhodné bázi (kanonická báze není vhodná). Aby $K^2 = Id$ musí být A^2 násobek jednotkové matice.

7. Určete pól přímky $x - y = 2$ vzhledem ke kvadrice $x^2 + y^2 - 3x + 1 = 0$ v afinním prostoru R^2.