U příkladů podobných příkladům z 1. testu je uveden pouze výsledek.

Příklad 1. Pomocí Euklidova algoritmu určete 51^{-1} v tělese $\mathbb{Z}_{113}$.

Řešení. 82.

Příklad 2. Buď $\mathbb{T}_3 = (T_3, \circ)$, kde T_3 je množina všech zobrazení $\{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$ a $\circ$ je operace skládání. Dokažte, že $\mathbb{T}_3$ je generována množinou

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Řešení. Označme daná zobrazení pořadě α, β, γ a označme $M = \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$. Zobrazení α je permutace $(1\ 2\ 3)$, zobrazení β je permutace $(1\ 2)$. Na cvičení jsme si ukazovali, že $S_3 = \langle \alpha, \beta \rangle$, tedy $S_3 \subseteq M$. Nechť $a \neq b$ jsou libovolné prvky množiny $\{1,2,3\}$. Označme π permutaci, pro kterou $\pi(1) = a$ a $\pi(2) = b$. Zobrazení $f = \pi\gamma$ patří do M ($\pi, \gamma \in M$), $f(1) = f(3) = a$, $f(2) = b$. Označíme $g = f \circ (1\ 2)$ a $h = f \circ (1\ 3)$. Obě tato zobrazení patří do M, $g(1) = b, g(2) = g(3) = a$ a $h(1) = b, h(2) = h(3) = a$. Ukázali jsme, že všechna zobrazení, jejichž obraz je alespoň dvouprvkový, patří do M. Vhodným složením lze zřejmě získat všechna tři konstantní zobrazení, tedy $M = T_3$.

Příklad 3. Najděte všechny homomorfismy $\mathbb{A} \to \mathbb{B}$, kde $\mathbb{A} = \{a,b,c,d\}(f)$ a $\mathbb{B} = \{0,1\}(g)$ a f, g jsou unární operace dané předpisy $f(a) = b$, $f(b) = c$, $f(c) = d$, $f(d) = a$, $g(0) = 1$, $g(1) = 0$.

Řešení. Nechť $h : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ je homomorfismus. Pokud $h(a) = 0$, pak $h(b) = h(f(a)) = g(h(a)) = g(0) = 1$. Podobně zjistíme, že $h(c) = 0$ a $h(d) = 1$. Snadno lze nahlédnout, že toto zobrazení je skutečně homomorfismem. Podobně zjistíme, že z $h(a) = 1$ plyne $h(c) = 1, h(b) = h(d) = 0$ a toto zobrazení je rovněž homomorfismem.

Příklad 4. Najděte všechny kongruence algebry $\{a,b,c,d\}(*)$, kde

*	a	b	c	d
a	d	a	a	d
b	b	a	a	c
c	c	a	a	b
d	d	d	d	d

Řešení. $|a|b|c|d|$, $|bc|a|d|$, $|bc|ad|$, $|abcd|$.

Příklad 5. Uvažujme permutaci $\pi = (1\ 3\ 10\ 2\ 11)(4\ 5\ 9\ 8)(6\ 7) \in S_{12}$.

- Jaký je řád π v grupě S_{12}?
- Spočítejte π^{2009}.

Řešení.

- 20.
- (1 11 2 10 3)(4 5 9 8)(6 7).

Příklad 6. (1 bod) Pro libovolný homomorfismus $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ platí
- **ANO NE** Jádro f je podalgebrou algebry $\mathbb{A}$.
- **ANO NE** Obraz f je kongruencí algebry $\mathbb{B}$.
- **ANO NE** Jádro f je kongruencí algebry $\mathbb{A}$.
- **ANO NE** Jádro f je kongruencí algebry $\mathbb{B}$.
- **ANO NE** Obraz f je podalgebrou algebry $\mathbb{B}$.

Řešení. NE, NE, ANO, NE, ANO

Příklad 7. (1 bod)
$\mathbb{Z}_n$ značí grupu s prvky $0, 1, \ldots, n-1$ a binární grupová operace je sčítání modulo n. $\mathbb{Z}_n^*$ značí grupu s těmi prvky $\mathbb{Z}_n$, které jsou nesoudělné s n, a binární grupová operace je násobení modulo n.
- **ANO NE** Řád prvku 3 v grupě $\mathbb{Z}_7^*$ je 6.
- **ANO NE** Řád prvku 3 v grupě $\mathbb{Z}_7$ je 7.
- **ANO NE** Libovolný prvek $a \in \mathbb{Z}_{11}$, $a \neq 0$ má řád 11.

Řešení. ANO, ANO, ANO

Příklad 8. (1 bod)
Poznámka: cyklická grupa = grupa generovaná jedním prvkem. Značení je jako u předchozího příkladu.
- **ANO NE** Grupa $\mathbb{Z}_6^*$ je cyklická.
- **ANO NE** Grupa $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9$ je cyklická.
- **ANO NE** Grupa S_3 (všechny permutace na třech prvcích s operací skládání) je cyklická.

Řešení. ANO (je to 2-prvková grupa), ANO (izomorfní se $\mathbb{Z}_{36}$), NE (není ani komutativní)

Příklad 9. (1 bod)
- **ANO NE** Každá podmnožina komutativní (=abelovské) grupy $\mathbb{G}$, která obsahuje jednotkový prvek, je podgrupou $\mathbb{G}$.
- **ANO NE** Každá podgrupa cyklické grupy $\mathbb{G}$ je normální podgrupou $\mathbb{G}$.
- **ANO NE** Nechť N je normální podgrupou grupy $\mathbb{G}$. Pak pro libovolné $g_1, g_2 \in G, n \in N$ platí $g_1^{-1} g_2 n g_2^{-1} g_1 \in N$.

Řešení. NE (např. $\{0, 2\}$ není podgrupou $\mathbb{Z}_6$), ANO (cyklická grupa je abelovská), ANO

Příklad 10. (1 bod)

- **ANO NE** Pro libovolnou permutaci $\pi \in S_{10}$ platí: Pokud $\pi^3 = id$, pak π je trojcyklus (tj. permutace tvaru $(i\ j\ k)$).
- **ANO NE** Pro libovolné permutace $\pi, \rho, \sigma \in S_{10}$ existuje právě jedno $\nu \in S_{10}$, pro které $\pi \circ \nu \circ \sigma = \rho$.
- **ANO NE** Pro libovolnou permutaci $\pi \in S_{10}$ platí: Pokud $\pi^2 = id$, pak π je sudá.

Řešení. NE (např. (1 2 3)(4 5 6)), ANO ($\nu = \pi^{-1}\rho\sigma^{-1}$), NE (např. (1 2))