Pozorně si přečtěte zadání. Zadání pokračuje na druhé straně! Test odevzdávejte i se zadáním. Můžete používat jakékoliv zdroje, kromě pomoci ostatních studentů. U příkladů 1-4 pište postup, samotný výsledek je bezcenný.

Maximum je 25 bodů. K výsledku se přičte polovina z bodů za domácí úkoly (1-5, tj. max. 10 bodů). Celkově je třeba alespoň 20 bodů.

Příklad 1. (4 body) Pomocí Euklidova algoritmu určete 51^{-1} v tělese $\mathbb{Z}_{113}$.

Příklad 2. (4 body) Buď $\mathbb{T}_3 = (T_3, \circ)$, kde T_3 je množina všech zobrazení $\{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$ a $\circ$ je operace skládání. Dokažte, že $\mathbb{T}_3$ je generována množinou

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Příklad 3. (4 body) Najděte všechny homomorfismy $\mathbb{A} \to \mathbb{B}$, kde $\mathbb{A} = \{a,b,c,d\}(f)$ a $\mathbb{B} = \{0,1\}(g)$ a f, g jsou unární operace dané předpisy $f(a) = b$, $f(b) = c$, $f(c) = d$, $f(d) = a$, $g(0) = 1$, $g(1) = 0$.

Příklad 4. (4 body) Najděte všechny kongruence algebry $\{a,b,c,d\}(*)$, kde

*	a	b	c	d
a	d	a	a	d
b	b	a	a	c
c	c	a	a	b
d	d	d	d	d

Příklad 5. Uvažujme permutaci $\pi = (1\ 3\ 10\ 2\ 11)(4\ 5\ 9\ 8)(6\ 7) \in S_{12}$.

- (1 bod) Jaký je řád π v grupě S_{12}?
- (2 body) Spočítejte π^{2009}.

V následujících příkladech jen zakroužkujte správnou možnost (žádné vysvětlení není třeba). K získání bodu je třeba správně odpovědět na všechny otázky.

Příklad 6. (1 bod) Pro libovolný homomorfismus $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ platí
- **ANO NE** Jádro f je podalgebrou algebry $\mathbb{A}$.
- **ANO NE** Obraz f je kongruencí algebry $\mathbb{B}$.
- **ANO NE** Jádro f je kongruencí algebry $\mathbb{A}$.
- **ANO NE** Jádro f je kongruencí algebry $\mathbb{B}$.
- **ANO NE** Obraz f je podalgebrou algebry $\mathbb{B}$.

Příklad 7. (1 bod)
$\mathbb{Z}_n$ značí grupu s prvky $0, 1, \dots, n-1$ a binární grupová operace je sčítání modulo n. $\mathbb{Z}_n^*$ značí grupu s těmi prvky $\mathbb{Z}_n$, které jsou nesoudělné s n, a binární grupová operace je násobení modulo n.
- **ANO NE** Řád prvku 3 v grupě $\mathbb{Z}_7^*$ je 6.
- **ANO NE** Řád prvku 3 v grupě $\mathbb{Z}_7$ je 7.
- **ANO NE** Libovolný prvek $a \in \mathbb{Z}_{11}$, $a \neq 0$ má řád 11.

Příklad 8. (1 bod)
Poznámka: cyklická grupa = grupa generovaná jedním prvkem. Značení je jako u předchozího příkladu.
- **ANO NE** Grupa $\mathbb{Z}_6^*$ je cyklická.
- **ANO NE** Grupa $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9$ je cyklická.
- **ANO NE** Grupa S_3 (všechny permutace na třech prvcích s operací skládání) je cyklická.

Příklad 9. (1 bod)
- **ANO NE** Každá podmnožina komutativní (=abelovské) grupy $\mathbb{G}$, která obsahuje jednotkový prvek, je podgrupou $\mathbb{G}$.
- **ANO NE** Každá podgrupa cyklické grupy $\mathbb{G}$ je normální podgrupou $\mathbb{G}$.
- **ANO NE** Nechť N je normální podgrupou grupy $\mathbb{G}$. Pak pro libovolné $g_1, g_2 \in G, n \in N$ platí $g_1^{-1} g_2 n g_2^{-1} g_1 \in N$.

Příklad 10. (1 bod)
- **ANO NE** Pro libovolnou permutaci $\pi \in S_{10}$ platí: Pokud $\pi^3 = id$, pak π je trojcyklus (tj. permutace tvaru $(i\ j\ k)$).
- **ANO NE** Pro libovolné permutace $\pi, \rho, \sigma \in S_{10}$ existuje právě jedno $\nu \in S_{10}$, pro které $\pi \circ \nu \circ \sigma = \rho$.
- **ANO NE** Pro libovolnou permutaci $\pi \in S_{10}$ platí: Pokud $\pi^2 = id$, pak π je sudá.

Příklad 11. (1 bod)
- **ANO NE** Podepsal jste se.
- **ANO NE** Test odevzdáte i se zadáním.
- **ANO NE** Opisoval jste od kolegy.