Pozorně si přečtěte zadání. Zadání pokračuje na druhé straně! Test odevzdávejte i se zadáním. Můžete používat jakékoliv zdroje, kromě pomoci ostatních studentů. U příkladů 1-4 pište postup, samotný výsledek je bezcenný.

Maximum je 25 bodů. K výsledku se přičte polovina z bodů za domácí úkoly (1-5, tj. max. 10 bodů). Celkově je třeba alespoň 20 bodů.

Příklad 1. (4 body) Pomocí Euklidova algoritmu určete 50^{-1} v tělese $\mathbb{Z}_{113}$.

Příklad 2. (4 body) Uvažujme algebru $\mathbb{M} = M(+, -, \cdot)$, kde M je množina všech čtvercových matic typu 2×2 nad celými čísly, $+$ je běžná binární operace sčítání matic, $\cdot$ je běžné násobení a $-$ je běžné (unární) minus. Dokažte, že $\mathbb{M}$ je generována množinou

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Příklad 3. (4 body) Najděte všechny homomorfismy $\mathbb{A} \to \mathbb{B}$, kde $\mathbb{A} = \{a, b, c, d\}(f)$ a $\mathbb{B} = \{0, 1\}(g)$ a f, g jsou unární operace dané předpisy $f(a) = f(b) = c$, $f(c) = f(d) = d$, $g(0) = g(1) = 1$.

Příklad 4. (4 body) Najděte všechny kongruence algebry $\{a, b, c, d\}(*)$, kde

*	a	b	c	d
a	b	a	b	c
b	b	d	b	d
c	b	c	b	a
d	d	d	d	d

Příklad 5. Uvažujme permutaci $\pi = (1\ 3\ 10\ 2)(4\ 5\ 9)(6\ 7) \in S_{11}$.

- (1 bod) Jaký je řád π v grupě S_{11}?
- (2 body) Spočítejte π^{2009}.

V následujících příkladech jen zakroužkujte správnou možnost (žádné vysvětlení není třeba). K získání bodu je třeba správně odpovědět na všechny otázky.

Příklad 6. (1 bod) Pro libovolný homomorfismus $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ platí
- **ANO NE** Jádro f je kongruencí algebry $\mathbb{A}$.
- **ANO NE** Obraz f je kongruencí algebry $\mathbb{B}$.
- **ANO NE** Jádro f je podalgebrou algebry $\mathbb{A}$.
- **ANO NE** Jádro f je kongruencí algebry $\mathbb{B}$.
- **ANO NE** Obraz f je podalgebrou algebry $\mathbb{B}$.

Příklad 7. (1 bod)
$\mathbb{Z}_n$ značí grupu s prvky $0, 1, \ldots, n-1$ a binární grupová operace je sčítání modulo n. $\mathbb{Z}_n^*$ značí grupu s těmi prvky $\mathbb{Z}_n$, které jsou nesoudělné s n, a binární grupová operace je násobení modulo n.
- **ANO NE** Řád prvku 4 v grupě $\mathbb{Z}_{11}$ je 3.
- **ANO NE** Řád prvku 4 v grupě $\mathbb{Z}_{12}$ je 3.
- **ANO NE** Libovolný prvek $a \in \mathbb{Z}_{11}^*$, $a \neq 1$ má řád 10.

Příklad 8. (1 bod)
Poznámka: cyklická grupa = grupa generovaná jedním prvkem. Značení je jako u předchozího příkladu.
- **ANO NE** Grupa $\mathbb{Z}_4$ je cyklická.
- **ANO NE** Grupa $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ je cyklická.
- **ANO NE** Grupa $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_3$ je cyklická.

Příklad 9. (1 bod)
- **ANO NE** Každá podmnožina komutativní (=abelovské) grupy $\mathbb{G}$ je podgrupou $\mathbb{G}$.
- **ANO NE** Každá podgrupa komutativní grupy $\mathbb{G}$ je normální podgrupou $\mathbb{G}$.
- **ANO NE** Nechť N je normální podgrupou grupy $\mathbb{G}$. Pak pro libovolné $n_1, n_2 \in N, g \in G$ platí $g^{-1}n_1^{-1}n_2g \in N$.

Příklad 10. (1 bod)
- **ANO NE** Pro libovolnou permutaci $\pi \in S_{10}$ platí: Pokud $\pi^2 = id$, pak π je transpozice.
- **ANO NE** Pro libovolné permutace $\pi, \rho \in S_{10}$ existuje právě jedno $\nu \in S_{10}$, pro které $\pi \circ \nu = \rho$.
- **ANO NE** Pro libovolnou permutaci $\pi \in S_{10}$ platí: Pokud $\pi^3 = id$, pak π je sudá.

Příklad 11. (1 bod)
- **ANO NE** Podepsal jste se.
- **ANO NE** Test odevzdáte i se zadáním.
- **ANO NE** Opisoval jste od kolegy.