Domácí úkol č. 8 k přednášce NMAG 102: Lineární algebra a geometrie 2, letní semestr 2012–2013

Datum odevzdání 18.4.2013

(8.1) Najděte dvě regulární symetrické bilineární formy f, g na $\mathbb{R}^2$, pro které neexistuje báze B prostoru $\mathbb{R}^2$, která je zároveň f-ortogonální a g-ortogonální. Stačí hledané formy pospat a dokázat, že báze B neexistuje. Nemusíte tedy popisovat postup, jak jste k příkladu dospěli.

Nápověda: Na přednášce dokážeme, že je-li jedna z forem pozitivně definitní, pak takovou společnou bázi můžeme najít. To vylučuje mnoho možností.

(8.2) Nechť $\mathbf{T}$ je těleso charakteristiky různé od 2. Dokažte, že pro libovolnou nenulovou antisymetrickou (=kososymetrickou) formu f na prostoru $\mathbf{T}^3$ existuje báze B prostoru $\mathbf{T}^3$ taková, že

$$[f]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Při důkazu nesmíte použít vlastní čísla a vektory.

Nápověda: Nejprve si rozmyslete situaci v dimenzi 2. V dimenzi 3 nejprve ukažte, že f je singulární (využijte determinanty) a pak nějaký vektor z radikálu doplňte na bázi.