Domácí úkol č. 6 k přednášce NMAG 102: Lineární algebra a geometrie 2, letní semestr 2012–2013

Datum odevzdání 4.4.2013

Připomeňme několik poznatků z přednášky.

- Je-li $\lambda \in \mathbb{C}$ vlastním číslem reálné matice A a $\mathbf{v}$ příslušný vlastní vektor, pak je také $\overline{\lambda}$ vlastním číslem matice A a $\overline{\mathbf{v}}$ je vlastním vektorem příslušným $\overline{\lambda}$.
- Je-li A komplexní normální matice, pak vlastní vektory příslušné různým vlastním číslům jsou na sebe kolmé.
- Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ je kolmý na $\overline{\mathbf{v}}$ právě tehdy, když reálná část $\mathrm{Re}(\mathbf{v})$ vektoru $\mathbf{v}$ je kolmá na imaginární část $\mathrm{Im}(\mathbf{v})$ vektoru $\mathbf{v}$ a eukleidovské normy vektorů $\mathrm{Re}(\mathbf{v})$ a $\mathrm{Im}(\mathbf{v})$ jsou stejné. (Toto jsme v jedné paralelce podrobně nerozebírali. Můžete nahlédnout do skript, ale nejlepší bude, když ověříte sami.)

(6.1) Nechť A je normální reálná čtvercová matice řádu 2, která nemá reálná vlastní čísla. Označme $\lambda \in \mathbb{C}$ vlastní číslo matice A a vezmeme libovolný nenulový vlastní vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^2$ příslušný λ. Označme $\mathbf{u}_1$ znormovanou reálnou část vektoru $\mathbf{v}$ a $\mathbf{u}_2$ znormovanou imaginární část vektoru $-\mathbf{v}$. Z poznámek výše víme, že $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ je ortonormální báze $\mathbb{R}^2$. Najděte matici f_A vzhledem k bázi $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$. Interpretujte geometricky (tj. „co dělá“ operátor f_A).

(6.2) Pro obecnou reálnou čtvercovou matici A řádu n dokažte, že existuje ortonormální báze B prostoru $\mathbb{R}^n$ taková, že matice operátoru f_A vzhledem k bázi B je (reálná) blokově diagonální matice, jejíž bloky jsou velikosti 1 nebo 2, a bloky velikosti 2 jsou tvaru popsaném v předchozím cvičení. Pro $n = 3$ interpretujte geometricky.

(6.3) Popište podobným způsobem jako v předchozím příkladu situaci pro speciální případ antisymetrických (=kososymetrických) matic, tj. matic splňujících $A = -A^T$.