Domácí úkol č. 2 k přednášce NMAG 102: Lineární algebra a geometrie 2, letní semestr 2012–2013

Datum odevzdání 7.3.2013

(2.1) Matice A řádu n má n různých vlastních čísel $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Dokažte, že $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$.

(2.2) Matice A řádu n má n různých vlastních čísel $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ a charakteristický polynom $p(\lambda) = a_n \lambda^n + \ldots + a_1 \lambda + a_0$. Dosazením matice A do polynomu p rozumíme matici

$$p(A) = a_n A^n + \ldots + a_1 A + a_0 I_n \ .$$

Dokažte, že $p(A) = 0$.

Nápověda: Rozložte p na lineární faktory a všimněte si, že $p(A)$ lze vypočítat dosazením matice A do jednotlivých faktorů. Pak vyjádřete A jako součin RDR^{-1}, dosaďte a upravte celý výraz do podoby RXR^{-1} a nahlédněte, že X je nulová.

(2.3) Metodou z přednášky najděte vzorec pro výpočet n-tého členu reálné posloupnosti

$$a_0 = 1, a_1 = 1, \quad a_{n+2} = 2(a_{n+1} - a_n) \text{ pro každé } n \in \{0, 1, \ldots\} \ .$$

Poznámky: Příslušná matice nemá reálná vlastní čísla. Využijte komplexní vlastní čísla. **Ve výsledném vzorci se ale nesmí vyskytovat komplexní čísla, která nejsou reálná.** K úpravě do takového tvaru využijte goniometrický tvar komplexního čísla a Moivreovu větu.