Domácí úkol č. 10 k přednášce NMAG 102: Lineární algebra a geometrie 2, letní semestr 2012–2013

Datum odevzdání 2.5.2013

(10.1) Nechť $\mathbf{A}$ je afinní prostor nad tělesem $\mathbf{T}$.

(a) Předpokládejme, že char $\mathbf{T} \neq 2$. Dokažte, že každou afinní kombinaci bodů v A lze vytvořit pomocí afinních kombinací dvojic. Formálněji: Dokažte, že pro libovolnou afinní kombinaci $a = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k$ bodů z A existuje posloupnost bodů $(b_1, \ldots, b_l)$ v A, kde $b_l = a$ a každý bod b_i je buď roven některému z bodů $a_1, \ldots, a_k$ nebo je roven afinní kombinaci dvojice bodů b_j, b_k, kde $j, k < i$.

(b) Na příkladu $\mathbf{A} = \mathbb{Z}_2^2$ ukažte, že ne každou afinní kombinaci bodů z A lze vytvořit jako afinní kombinaci dvojic.

(c) Předpokládejme, že $\mathbf{T} = \mathbb{Z}_2$. Dokažte, že každou afinní kombinaci lze vytvořit pomocí afinní kombinace trojic.

(10.2) Uvažujme tři body a_1, a_2, a_3 v afinním eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^2$ se standardním skalárním součinem, které neleží na jedné přímce. Najděte barycentrické souřadnice

(a) průsečíku výšek trojúhelníku $a_1a_2a_3$

(b) středu kružnice vepsané trojúhelníku $a_1a_2a_3$

v barycentrické soustavě souřadnic (a_1, a_2, a_3). Barycentrické souřadnice vyjádřete pomocí daných bodů a_1, a_2, a_3, odčítání, skalárního součinu a normy.

Poznámky. K řešení můžete použít poznatky z geometrie trojúhelníka ze střední školy, například sinovou větu.