Domácí úkol č. 1 k přednášce NALG 001: Lineární algebra a geometrie 1, zimní semestr 2012–2013

Datum odevzdání 17.10.2012

(1.1) Určete (bez použití elektronických pomůcek) zbytek po dělení čísla

$$14^{200} + 33^{30} - 28^{15} + 25^5 \cdot 5^{20} - 10^{305}$$

číslem 13.

(1.2) Spočítejte největšího společného dělitele a Bezoutovy koeficienty pro polynomy

$$f(x) = x^5 - x^4 - 15x^3 + 7x^2 + 31x - 23, \quad g(x) = x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 6x + 5.$$

Poznámky k příkladu 1.2. V úvodním textu jsme diskutovali, jak se počítá největší společný dělitel a Bezoutovy koeficienty pro celá čísla. Nelekejte se polynomů v zadání, postup je vlastně stejný. Dělení se zbytkem znáte ze střední školy. Platí podobná věta jako pro čísla

Věta. Jsou-li $f(x), g(x)$ polynomy nad reálnými čísly, pak existují jednoznačně určené polynomy $q(x), r(x)$ takové, že $r(x)$ má stupeň menší než stupeň $g(x)$ a

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x).$$

Polynom $r(x)$ nazýváme zbytek po dělení polynomu $f(x)$ polynomem $g(x)$ a značíme $r(x) = f(x) \bmod g(x)$.

Polynom nazýváme monický, pokud je koeficient u nejvyšší mocniny roven jedné.

Říkáme, že polynom $g(x)$ dělí polynom $f(x)$, pokud $f(x) \bmod g(x) = 0$.

Největší společný dělitel $f(x)$ a $g(x)$ je monický polynom, který dělí oba polynomy $f(x)$, $g(x)$, a má největší možný stupeň, značíme $\gcd(f(x), g(x))$.

Stejně jako pro celá čísla platí $\gcd(f(x), g(x)) = \gcd(g(x), f(x) \bmod g(x))$, takže k hledání největšího společného dělitele i Bezoutových koeficientů lze postupovat jako pro celá čísla.

Příklad. Vezmeme polynomy $f(x) = x^2 - x + 4$, $g(x) = x + 2$. Dělením $f(x)$ polynomem $g(x)$ získáme podíl $x - 3$ a zbytek 10, neboli

$$x^2 - x + 4 = (x - 3)(x + 2) + 10.$$

Takže $\gcd(f(x), g(x)) = \gcd(g(x), f(x) \bmod g(x)) = \gcd(x + 2, 10) = 1$. Největší společný dělitel je 1, nikoliv 10 – výsledek musíme znormovat, tj. vydělit vedoucím koeficientem, abychom dostali monický polynom.

Ze vztahu výše dostaneme $10 = 1 \cdot (x^2 - x + 4) + (-x + 3)(x + 2)$ a po vydělení 10 máme

$$1 = \frac{1}{10}\left(x^2 - x + 4\right) + \left(-\frac{1}{10}x + \frac{3}{10}\right)(x + 2),$$

takže Bezoutovy koefcienty jsou (např.) $\frac{1}{10}$ a $-1/10x + 3/10$.