Cvičení k přednášce NMAG111 Lineární algebra 1

Řešení

Verze ze dne 14. října 2021

13 Typy a prostory lineárních zobrazení

Cíle cvičení:

- procvičit hledání jader a obrazů lineárních zobrazení,
- naučit se využívat dimenze jádra a obrazu k popisu typu lineárního zobrazení,
- naučit se pracovat s prostory lineárních zobrazení a s lineárními formami.

Řešené příklady:

Úloha 13.1. Pro lineární zobrazení $f : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^2$ s maticí vzhledem ke kanonickým bázím $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ najděte bázi podprostorů $\operatorname{Ker} f$ a $\operatorname{Im} f$ a rozhodněte je f monomorfismus, epimorfismus či izomorfismus.

Řešení. Připomeňme, že $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{v} | \ f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\} = \{\mathbf{v} | \ A\mathbf{v} = \mathbf{0}\}$. Tedy $\operatorname{Ker} f$ je právě množina všech řešení homogenní soustavy s maticí A, tj. $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} A$. Snadno spočítáme, že $\operatorname{Ker} f = \operatorname{LO}\{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$, tudíž $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ je báze $\operatorname{Ker} f$.

Vezmeme-li libovolnou generující množinu G vektorového prostoru $\mathbb{Z}_5^3$ (například kanonickou bázi), potom $f(G)$ tvoří generující množinu podprostoru $\operatorname{Im} f = f(\mathbb{Z}_5^3)$. Vidíme, že $f((1,0,0)^T) = (4,1)^T$, $f((0,1,0)^T) = (1,2)^T$ a $f((0,0,1)^T) = (2,3)^T$, tj. obrazy vektorů kanonické báze tvoří právě sloupce matice A. To znamená, že $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} A = \operatorname{LO}\{\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\} = \mathbb{Z}_5^2$. Dimenze $\operatorname{Im} f$ je jak víme také podle Věty o dimenzi jádra a obrazu rovna $3 - \dim \operatorname{Ker} A = 2$ a bází $\operatorname{Im} f$ je tudíž libovolná báze $\mathbb{Z}_5^2$, například kanonická báze. Protože je jádro netriviální, zobrazení není monomorfismus ani izomorfismus, a protože je na, jedná se o epimorfismus.

Úloha 13.2. Uvažujme lineární zobrazení $f : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^3$ s maticí $[f]^M_{K_3} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ vzhledem k bázi $M = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ a kanonické bázi K_3. Ověřte, že f je izomorfismus, a najděte matice f a f^{-1} vzhledem ke kanonickým bázím.

Řešení. Protože platí $f = f \circ \operatorname{Id}$, lze pomocí tvrzení o matici složeného zobrazení vyjádřit hledanou matici $[f]^{K_3}_{K_3}$ jako součin matic:

$$[f]^{K_3}_{K_3} = [f]^M_{K_3} \cdot [\operatorname{Id}]^{K_3}_M = [f]^M_{K_3} \cdot ([\operatorname{Id}]^M_{K_3})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Transponovaný součin spočítáme standardním algoritmem pomocí rozšířené matice:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Spočítali jsme, že $[f]_{K_3}^{K_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Nyní využijeme faktu, že $[f^{-1}]_{K_3}^{K_3} = ([f]_{K_3}^{K_3})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$, a úlohu dopočítáme známým postupem:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right),$$

tedy $[f^{-1}]_{K_3}^{K_3} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Úloha 13.3. Uvažujme lineární zobrazení $\varphi : \mathbb{Z}_7^3 \to \mathbb{Z}_7^2$ nad tělesem $\mathbb{Z}_7$ dané podmínkami

$$\varphi(\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \varphi(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \varphi(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Najděte matici $[\varphi]_{K_2}^{K_3}$ lineárního zobrazení φ vzhledem ke kanonickým bázím, spočítejte dimenze podprostorů $\operatorname{Ker}\varphi$ a $\operatorname{Im}\varphi$ a rozhodněte, zda jde o monomorfismus nebo epimorfismus.

Řešení. Nejprve si všimněme, že posloupnost $M = (\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix})$ je báze prostoru $\mathbb{Z}_7^3$ a že je ze zadání zjevná matice $[\varphi]_{K_2}^{M} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$. Užijeme-li větu z přednášky, zjistíme, že

$$[\varphi]_{K_2}^{K_3} = [\varphi]_{K_2}^{M} \cdot [\mathrm{Id}]_{M}^{K_3} = [\varphi]_{K_2}^{M} \cdot ([\mathrm{Id}]_{K_3}^{M})^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

Nyní spočítáme transponovaný součin $([\varphi]_{K_2}^{K_3})^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 5 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

Zjistili jsme, že $[\varphi]_{K_2}^{K_3} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. Odtud okamžitě vidíme, že $\operatorname{rank}[\varphi]_{K_2}^{K_3} = 1$, proto $\dim \operatorname{Ker}\varphi = 3 - 1 = 2$ a $\dim \operatorname{Im}\varphi = 1$. Proto φ není ani prosté ani na, tedy se nejedná ani o monomorfismus ani o epimorfismus.

Úloha 13.4. Najděte nějakou bázi reálného vektorového prostoru $\operatorname{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ a rozhodněte, zda jsou ve vektorovém prostoru $\operatorname{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ lineárně nezávislá posloupnost lineární zobrazení f, g, h, pokud

(a) $f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $g(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$, $h(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$,

(b) $[f]^{K_3}_{K_2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $[g]^{K_3}_{K_2} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $[h]^{K_3}_{K_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, kde K_3 a K_2 jsou kanonické báze,

(c) $[f]^B_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $[g]^B_C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $[h]^B_C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, kde B je báze $\mathbb{R}^3$ a C je báze $\mathbb{R}^2$.

Řešení. Uvědomíme-li si, že zobrazení $\varphi \to [\varphi]^{K_3}_{K_2}$ vektorového prostoru $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ do vektorového prostoru matic $\mathbb{R}^{3\times 2}$ je lineární bijekce, tedy izomorfismus, stačí nám najít například bázi

$$M = (\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}),$$

vektorového prostoru $\mathbb{R}^{3\times 2}$. Odpovídající bázi $(b_1 \dots, b_6)$ prostoru $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ můžeme vyjádřit pro $\mathbf{v} = (x, y, z)^T$ předpisy

$$b_1(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, b_2(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}, b_3(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix}, b_4(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}, b_5(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}, b_6(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix}.$$

(a) Úlohu můžeme vyřešit buď v izomorfním vektorovém prostoru $\mathbb{R}^{3\times 2}$, tj. rozhodnout, zda je lineárně nezávislá posloupnost matic $([f]^{K_3}_{K_2}, [g]^{K_3}_{K_2}, [h]^{K_3}_{K_2})$ nebo ji vyřešit v souřadnicích vzhledem k bázi (b_i) prostoru $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$:

$$\begin{pmatrix} [f]^T_{(b_i)} \\ [f]^T_{(b_i)} \\ [f]^T_{(b_i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vidíme, že jsou souřadnicové vektory $[f]_{(b_i)}, [f]_{(b_i)}, [f]_{(b_i)}$ lineárně nezávislé, tedy je posloupnost f, g, h lineárně nezávislá.

(b) Tentokrát standardním postupem zjistíme, že

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

a proto $2f - g = h$, tudíž posloupnost f, g, h je lineárně závislá.

(c) Protože také zobrazení $\varphi \to [\varphi]^B_C$ je izomorfismus reálných vektorových prostorů $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ a $\mathbb{R}^{3\times 2}$, stačí obdobně jako v předchozích bodech nahlédnout, že je posloupnost matic

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a tedy i lineárních zobrazení f, g, h lineárně nezávislá.

Úloha 13.5. Uvažujme lineární formy na vektorovém prostoru $V = \mathbb{Z}_5^3$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$:

$$f_1(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = x + 2z, \quad f_2(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = 3x + y + 2z, \quad f_3(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = 4x + y + z.$$

(a) Ověřte, že posloupnost $B = (f_1, f_2, f_3)$ tvoří bázi duálního vektorového prostoru $V^d = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_5^3, \mathbb{Z}_5)$,

(b) spočítejte souřadnice $[g]_B$ lineární formy $g(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = 4z$,

(c) najděte bázi podprostoru $\bigcap_{a,b\in\mathbb{Z}_5} \mathrm{Ker}\,(af_1 + bf_2)$,

(d) najděte bázi podprostoru všech lineárních forem, jejichž jádro obsahuje vektor $(1,1,2)^T$.

Řešení. (a) Protože víme, že $\dim V^d = \dim V = 3$, stačí podobně jako v předchozí úloze ukázat, že je posloupnost (f_1, f_2, f_3) lineárně nezávislá. K tomuto účelu stačí prozkoumat hodnost

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} [f_1]^{K_3} \\ [f_2]^{K_3} \\ [f_3]^{K_3} \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 3.$$

Tím jsme ověřili, že je posloupnost B lineárně nezávislá, a proto i báze $\dim V^d$.

(b) Příklad spočítáme v souřadnicích matic lineárních forem vzhledem ke kanonické bázi, tedy najdeme souřadnice řádkového aritmetického vektoru $[g]^{K_3} = (0,0,4)$ vzhledem k bázi

$$([f_1]^{K_3}, [f_2]^{K_3}, [f_3]^{K_3}) = ((1,0,2), (3,1,2), (4,1,1))$$

Snadno najdeme řešení soustavy rovnic s maticí $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right)$, které je hledaný souřadnicový vektor $[g]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(c) Stačí, abychom vyřešili homogenní soustavu lineárních rovnic s maticí $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, jejíž bázi zřejmě tvoří například vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(d) Řešíme úlohu duální k předchozí: hledáme podprostor řešení homogenní soustavy rovnic s maticí $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, který reprezentuje souřadnice hledaného podprostoru lineárních forem. Zpětnou substitucí okamžitě dostáváme například bázi $(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ souřadnicového podprostoru, proto například lineární formy $h_1(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = 4x + y$, $h_2(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = 3x + z$ tvoří bázi podprostoru forem s jádrem obsahujícím vektor $(1,1,2)^T$.

Další základní příklady k počítání:

Úloha 13.6. Určete dimenzi jádra $\mathrm{Ker}\,h$ a obrazu $\mathrm{Im}\,h$ lineárního zobrazení h nad tělesem T víte-li, že jeho matice vzhledem k (neznámým) bázím B a C je

(a) $[h]^B_C = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ pro $T = \mathbb{Z}_{11}$

(b) $[h]^B_C = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ pro $T = \mathbb{R}$

(c) $[h]_C^B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ pro $T = \mathbb{Q}$

(d) $[h]_C^B = \begin{pmatrix} 2+i & 1-i & 7+3i & -1 & 6-7i \\ 7-i & 3 & 4-i & 0 & 2i \end{pmatrix}$ pro $T = \mathbb{C}$

Řešení: (a) $2, 1$, (b) $1, 2$, (c) $1, 2$, (d) $3, 2$.

Úloha 13.7. Najděte báze jádra a obrazu lineárního zobrazení φ z úlohy 13.3.

Řešení: Báze $\operatorname{Ker}\varphi$ je např. $(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix})$ a báze $\operatorname{Im}\varphi$ je $((\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}))$.

Úloha 13.8. Je-li $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}$ matice lineárního zobrazení $f : \mathbb{Z}_7^4 \to \mathbb{Z}_7^3$ vzhledem k bázím $M = ((1,1,0,0)^T, (0,1,1,0)^T, (0,0,1,1)^T, (1,0,0,0)^T)$ prostoru $\mathbb{Z}_7^4$ a $N = ((3,1,4)^T, (3,3,0)^T, (2,1,6)^T)$ prostoru $\mathbb{Z}_7^3$. Určete bázi a dimenzi jádra $\operatorname{Ker} f$ a obrazu $\operatorname{Im} f$.

Řešení: $\dim(\operatorname{Im} f) = h([f]_{MN}) = 2$ a $\dim(\operatorname{Ker} f) = 4 - \dim(\operatorname{Im} f) = 2$.

Báze $\operatorname{Ker} f$ je například $((2,5,4,2)^T, (3,6,0,1)^T)$ a báze $\operatorname{Im} f$ je například $((6,5,6)^T, (5,2,3)^T)$.

Obtížnější příklady:

Úloha 13.9. Nechť $k \leq n$, V je vektorový prostor V nad tělesem $\mathbb{Z}_2$ dimenze n a U jeho podprostor dimenze k. Kolik existuje takových lineárních zobrazení $\varphi : V \to U$, že $U \subseteq \operatorname{Ker}\varphi$?

Řešení: $2^{k(n-k)}$.

Úloha 13.10. Pro parametrické lineární zobrazení $f_{a,b} : \mathbb{Z}_7^3 \to \mathbb{Z}_7^3$ najděte všechna $(a,b) \in \mathbb{Z}_7^2$, pro která je $f_{a,b}$ izomorfismus, jestliže $[f_{a,b}]_B^B = \begin{pmatrix} 1+a & 0 & 1 \\ 2 & b & 1+a \\ 3 & -a & 1 \end{pmatrix}$.

Úloha 13.11. Nechť $(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)$ je báze vektorového prostoru V. Dokažte, že je posloupnost lineárních forem $(f_1, \ldots, f_n)$ bází duálu V^d, právě když je matice $(f_i(\mathbf{b}_j))_{ij}$ regulární.