Cvičení k přednášce NMAG111 Lineární algebra 1

Řešení
Verze ze dne 14. října 2021

9 Báze

Cíle cvičení:

- naučit se hledat báze maticových i obecných vektorových prostorů.

Řešené příklady:

Úloha 9.1. Najděte pro matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{Z}_5$ báze prostorů $\operatorname{Im} A$, $\operatorname{Im} A^T$, $\operatorname{Ker} A$, $\operatorname{Ker} A^T$.

Řešení. Z odstupňovaného tvaru matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

okamžitě vidíme, že $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ je báze řádkového prostoru naší matice, tedy $\operatorname{Im} A^T$. Snadno z něj také spočítáme bazické řešení $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ homogenní soustavy s maticí A, tj. bázi $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ prostoru $\operatorname{Ker} A$.

Pro nalezení zbylých dvou bází provedeme tytéž výpočty s transponovanou maticí. Začneme řádkovou úpravou A^T:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zpětnou substitucí najdeme jednoprvkovou bázi $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ prostoru $\operatorname{Ker} A^T$. Zároveň vidíme, že bází $\operatorname{Im} A$ je například posloupnost $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ – nebo kterákoli jiná dvojice lineárně nezávislých vektorů tohoto prostoru, například první dva sloupce matice A.

Úloha 9.2. Rozhodněte, zda je posloupnost vektorů $M = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ bází vektorového prostoru $\mathbb{Q}^3$ nad tělesem $\mathbb{Q}$.

Řešení. Musíme ověřit, že je posloupnost lineárně nezávislá a že generuje celý prostor $\mathbb{Q}^3$. To nastává právě tehdy, když je matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, která v řádcích obsahuje právě vektory posloupnosti M, regulární. Budeme tedy matici A upravovat posloupností elementárních úprav na odstupňovaný tvar:

$$\begin{pmatrix}1&0&2\\2&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-3\\0&1&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-3\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

Zjistili jsme, že odstupňovaný tvar čtvercové matice A neobsahuje nulový řádek, proto je regulární a M je bází $\mathbb{Q}^3$. Poznamenejme ještě, že jsme stejně tak dobře mohli pracovat i s maticí A^T. neboť víme, že matice A je regulární právě tehdy, když je regulární matice A^T.

Úloha 9.3. Najděte nějakou bázi podprostoru U aritmetického vektorového prostoru T^4 nad tělesem T, jestliže

(a) $U = \{(0,0,0,0)^T\}$ pro libovolné těleso T,

(b) $U = T^4$ pro libovolné těleso T,

(c) $U = \mathrm{LO}\{(1,0,2,1)^T,(2,0,1,1)^T,(1,0,1,-1)^T\}$ pro $T = \mathbb{Q}$,

(d) $U = \mathrm{LO}\{(2,1,1,1)^T,(4,2,1,3)^T,(3,4,3,0)^T,\ (1,3,4,2)^T\}$ pro $T = \mathbb{Z}_5$,

(e) $U = \mathrm{LO}\{(2,0,3,4)^T,(3,3,1,2)^T,(3,1,1,2)^T\}$ pro $T = \mathbb{Z}_5$,

(f) $U = \mathrm{LO}\{(1,1,3,6)^T,(5,5,1,0)^T,(3,3,2,6)^T\}$ pro $T = \mathbb{Z}_7$.

Řešení. (a) Protože podprostor $\{(0,0,0,0)^T\}$ je generován prázdnou posloupností, je právě prázdná posloupnost $\emptyset$ bází U.

(b) Snadno nahlédneme, že bázi celého aritmetického vektorového prostoru T^4 tvoří například kanonická báze, tedy posloupnost sloupcových vektorů obsažených ve sloupcích jednotkové matice.

(c) Seřadíme vektory generující podprostor U do řádků matice A, čímž prostor U vyjádříme jako $\mathrm{Im}\,A^T$. Matici upravíme na odstupňovanou. Řádkové úpravy matice A nemění $\mathrm{Im}\,A^T$ a v odstupňovaném tvaru jsou nenulové řádky vždy lineárně nezávislé. Proto nenulové řádky odstupňovaného tvaru tvoří hledanou bázi U:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2&1\\2&0&1&1\\1&0&1&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&0&-3&-1\\0&0&-1&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&0&3&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Báze U je tedy například $((1,0,2,1)^T,(0,0,3,1)^T,(0,0,0,1)^T)$. Rovněž vidíme, že řádky matice A jsou lineárně nezávislé, proto je i původní posloupnost $((1,0,2,1)^T,(2,0,1,1)^T,(1,0,1,-1)^T)$ bází U.

(d) Stejně jako v (c) si podprostor U vyjádříme jako řádkový prostor jisté matice B, kterou následně upravíme na odstupňovaný tvar:

$$B=\begin{pmatrix}2&1&1&1\\4&2&1&3\\3&4&3&0\\1&3&4&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&4&2\\2&1&1&1\\4&2&1&3\\3&4&3&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&4&2\\0&0&3&2\\0&0&0&0\\0&0&1&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&4&2\\0&0&3&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Zjistili jsme, že posloupnost $((1,3,4,2)^T,(0,0,3,2)^T)$ je báze podprostoru $\mathrm{Im}\,B^T = U$.

(e) Opět upravujme matici, do jejíchž řádků jsme sepsali generující vektory podprostoru U:

$$\begin{pmatrix}2&0&3&4\\3&3&1&2\\3&1&1&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&0&3&4\\0&3&4&1\\0&1&4&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&0&3&4\\0&3&4&1\\0&0&1&4\end{pmatrix}.$$

Tedy například posloupnost $((2,0,3,4)^T, (0,3,4,1)^T, (0,0,1,4)^T)$ tvoří bázi podprostoru U.

(f) I zde upravujme matici, jejíž řádky jsou generující vektory podprostoru U:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 6 \\ 5 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že bázi U tvoří například posloupnost $((1,1,3,6)^T, (0,0,0,5)^T)$.

Úloha 9.4. Najděte nějakou bázi podprostorů vektorového prostoru reálných polynomů $\mathbb{R}[x]$ nad tělesem $\mathbb{R}$:

(a) $U_1 = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid \deg p \leq 3\}$,

(b) $U_2 = \mathrm{LO}\{x^2+x+1, x^2+2x, x^2+2\}$,

(c) $U_3 = \mathrm{LO}\{x+1, x-2, x^2-x+3, x^2+1\}$.

Řešení. (a) Nejprve si uvědomíme, že podprostor U_1 všech polynomů stupně nejvýše tři generuje posloupnost $B = (1, x, x^2, x^3)$. Teď chceme dokázat, že B je lineárně nezávislá, aby to byla báze.

Mějme nějakou lineární kombinaci prvků B, která nám dává nulu: $\sum_{i=0}^{3} a_i x^i = 0$. „Nula“ je v tomto případě nulový polynom (všechny koeficienty nulové). Rovnost $\sum_{i=0}^{3} a_i x^i = 0$ tedy říká, že polynom $\sum_{i=0}^{3} a_i x^i$ má všechny koeficienty nulové, neboli $a_0 = \cdots = a_3 = 0$. Z toho vidíme, že posloupnost B je lineárně nezávislá, a tudíž báze U_1.

(b) Připomeňme, že na minulém cvičení jsme spočítali, že je množina $\{x^2+x+1, x^2+2x, x^2+2\}$ lineárně závislá, protože pro lineární kombinaci položenou rovnu nulovému polynomu

$$0 = (x^2+x+1)a + (x^2+2x)b + (x^2+2)c = x^2(a+b+c) + x(a+2b) + (a+2c) = 0$$

dostáváme homogenní soustavu lineárních rovnic s maticí a ekvivalentní odstupňovanou maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a neznámými a, b, c. Snadno najdeme parametrický popis všech řešení soustavy, tedy

$$(a,b,c)^T \in \{(-2t, t, t)^T \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Protože je jedním řešením $(-2,1,1)^T$, vidíme, že

$$x^2 + 2 = 2 \cdot (x^2+x+1) - (x^2+2x).$$

To znamená, že $\mathrm{LO}\{x^2+x+1, x^2+2x, x^2+2\} = \mathrm{LO}\{x^2+x+1, x^2+2x\}$. Nyní už snadno stejnou úvahou zjistíme, že posloupnost (x^2+x+1, x^2+2x) je lineárně nezávislá, takže se jedná o bázi zkoumaného podprostoru U_2.

(c) Všimněme si, že U_3 je také podprostor prostoru všech reálných polynomů v x stupně nejvýše 2. Pracovat v tomto prostoru bude pohodlnější než počítat v celém $\mathbb{R}[x]$.

Každý polynom z U_3 můžeme jednoznačně napsat jako lineární kombinaci polynomů $B = (1, x, x^2)$ (to je vidět podobně jako v řešení části (a)). Pro každý ze zadaných polynomů $a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ si zapišme do řádku matice aritmetický vektor $(a_0, a_1, a_2)^T$ (takovému vektoru budeme brzy říkat vektor souřadnic vzhledem k bázi B) a hledejme bázi řádkového vektorového prostoru této matice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Odtud vidíme, že každý z původních polynomů dostaneme lineární kombinací polynomů z $\{1, x, x^2\}$ a že lineární obaly splňují $\mathrm{LO}\{x+1, x-2, x^2-x+3, x^2+1\} = \mathrm{LO}\{1, x, x^2\}$, takže posloupnost $(1, x, x^2)$ je jedna z možných bází U_3. (Možných bází U_3 je ale hodně; jinou možností by byla například první trojice generátorů, tj. posloupnost $(x+1, x-2, x^2-x+3)$.)

Další základní příklady k počítání:

Úloha 9.5. Najděte nějakou bázi prostoru $W = \mathrm{LO}\{(0,1,-3,4)^T, (2,2,2,2)^T, (1,-1,3,7)^T\} \leq \mathbb{R}^4$, která obsahuje vektor $(1,4,-4,-1)^T$.

Řešení: Například $((1,4,-4,-1)^T, (0,1,-3,4)^T, (2,2,2,2)^T)$.

Úloha 9.6. Najděte nějakou bázi následujících podprostorů vektorového prostoru $\mathbb{R}^{n\times n}$:

(a) podprostoru všech diagonálních matic

(b) podprostoru všech horních trojúhelníkových matic

(c) podprostoru všech takových symetrických matic ,že součet prvků na hlavní diagonále je nula.

(d) podprostor všech antisymetrických matic (tj. splňujících $A^T = -A$.)

Řešení: (a) Například množina všech (reálných) matic A typu $n\times n$ takových, které mají na diagonále právě jednu jedničku a jinak jsou všude nulové.

(b) Například množina všech (reálných) matic A typu $n\times n$, které mají jedničku na nějaké pozici (i,j) pro $i \leq j$ a všude jinde jsou nulové.

(c) Podobně jako (a), (b) je to například sjednocení dvou množin reálných matic $n\times n$: První množinu tvoří matice, pro které existují $1 \leq i < j \leq n$, že $A_{ij} = A_{ji} = 1$, a všude jinde je $A_{kl} = 0$. Druhou množinu tvoří diagonální matice, pro které existuje $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ takové, že $A_{kl} = 0$ všude krom $A_{ii} = 1$ a $A_{(i+1),(i+1)} = -1$.

(d) Například čtvercové reálné matice řádu n, pro které existují $1 \leq i < j \leq n$, že $A_{ij} = 1$, $A_{ji} = -1$. (Antisymetrické matice nad tělesem charakteristiky různé od 2 mají na diagonále samé nuly.)

Úloha 9.7. Najděte bázi podprostoru U reálného vektorového prostoru polynomů $\mathbb{R}[x]$, jestliže

(a) $U = \mathrm{LO}\{x^6+1, x^9+x^3, x^3\}$,

(b) $U = \mathrm{LO}\{x^3+x^2-x+2, x^3+5x^2+x+4, x^3-x^2-2x+1, 2x^2+x+1\}$,

(c) $U = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid p(0) = 0, \deg p < 5\}$,

(d) $U = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid p(1) = 0, \deg p < 5\} \cap \{p \in \mathbb{R}[x] \mid p(3) = 0, \deg p < 5\}$.

Řešení: (a) Například (x^6+1, x^9+x^3, x^3); (b) například $(x^3+x^2-x+2, x^3+5x^2+x+4)$; (c) například (x, x^2, x^3, x^4); (d) například $(x^2-4x+3, x^3-4x^2+3x, x^4-4x^3+3x^2) = \big((x-3)(x-1), (x-3)(x-1)x, (x-3)(x-1)x^2)\big)$.

Úloha 9.8. Vyberte z posloupnosti $X = ((0,0,0,0)^T, (3,1,4,2)^T, (2,3,5,1)^T, (1,5,6,1)^T)$ bázi podprostoru $\mathbf{U} = \mathrm{LO}\,X$ aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{Z}_7^4$ a doplňte ji na bázi celého prostoru $\mathbb{Z}_7^4$.

Řešení: Posloupnost $\left(\begin{pmatrix}3\\1\\4\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\5\\1\end{pmatrix}\right)$ je maximální LN v $\mathbf{U}$ a např. $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ ji doplňuje na bázi $\mathbb{Z}_7^4$.

Úloha 9.9. Určete dimenzi vektorového prostoru

$$W = \mathrm{LO}\{(3,2,3,4)^T, (a,1,3,5)^T, (4,1,2,3)^T, (4,a,4,7)^T\} \leq \mathbb{R}^4$$

v závislosti na $a \in \mathbb{R}$, vyberte z dané množiny generátorů bázi W a případně tuto bázi doplňte na bázi celého $\mathbb{R}^4$.

Obtížnější příklady:

Úloha 9.10. Jestliže

$$\mathbf{U} = \mathrm{LO}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix}\right\} \quad \text{a} \quad \mathbf{V} = \mathrm{LO}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\2\\2\end{pmatrix}\right\}$$

jsou podprostory vektorového prostoru $\mathbb{Z}_3^4$ nad tělesem $\mathbb{Z}_3$, najděte báze podprostorů $\mathbf{U}+\mathbf{V}$ a $\mathbf{U}\cap\mathbf{V}$.

Řešení: Bázi $\mathbf{U}+\mathbf{V}$ tvoří například celá kanonická báze $\mathbb{Z}_3^4$ a báze $\mathbf{U}\cap\mathbf{V}$ je třeba $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$.

Úloha 9.11. Je-li $U = \mathrm{LO}\{(2,-1,1,1)^T, (4,1,5,1)^T, (1,-2,-1,1)^T, (1,1,2,0)^T\}$ podprostor aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{Q}^4$, najděte bázi takového podprostoru V, aby $U \cap V = 0$ a $U + V = \mathbb{Q}^4$.

Řešení: Například $(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$.

Úloha 9.12. Najděte nějakou bázi

(a) vektorového prostoru reálných polynomů $\mathbb{R}[x]$ nad tělesem $\mathbb{R}$,

(b) racionálního vektorového prostoru $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a,b,c \in \mathbb{Q}\}$.

Řešení: (a) Například $(x^i)_{i=0}^{+\infty}$; (b) třeba $(1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$.

Úloha 9.13. Mějme množinu vektorů $M = \{(a_{i1}, \ldots, a_{in})^T \in \mathbb{C}^n, i = 1, \ldots, n\}$. Dokažte, že pokud pro všechna j platí $|a_{jj}| > \sum_{i=1, i\neq j}^{n} |a_{ij}|$, pak je M bází $\mathbb{C}^n$.