Cvičení k přednášce NMAG111 Lineární algebra 1

Řešení
Verze ze dne 15. listopadu 2021

7 Vektorové prostory

Cíle cvičení:

- porozumět pojmům podprostor, lineární kombinace, lineární obal a množina generátorů.

Řešené příklady:

Úloha 7.1. Pro $\mathbf{U} := \mathrm{LO}\left\{\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ rozhodněte, zda (a) $\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} \in \mathbf{U}$ a (b) $\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix} \in \mathbf{U}$, je-li $\mathbf{U}$ podprostor aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{Z}_5^3$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$. .

Řešení. Ptáme se, zda existují hodnoty $x, y \in \mathbb{Z}_5$, které řeší vektorovou rovnici

$$x\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} = \mathbf{v},$$

neboli chceme zjistit, zda existuje řešení soustavy tří rovnic o dvou neznámých (pro každou souřadnici dostáváme jednu rovnici) s maticemi, které snadno upravíme na odstupňovaný tvar.

(a)

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&3&1\\4&1&1\\3&1&4\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c}1&3&1\\0&4&2\\0&2&1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c}1&3&1\\0&1&3\\0&0&0\end{array}\right)$$

Vidíme, že řešení existuje, a proto je vektor $\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$ lineární kombinací vektorů $\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$, tj. $\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} \in \mathbf{U}$.

(b)

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&3&4\\4&1&1\\3&1&1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c}1&3&1\\0&4&0\\0&2&4\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c}1&3&1\\0&1&0\\0&0&4\end{array}\right)$$

Tentokrát soustava zjevně řešení nemá, tudíž $\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix} \notin \mathbf{U}$.

Mimochodem, mohli jsme si usnadnit práci tím, že bychom řešili rovnici s oběma pravými stranami současně – jako v úloze 7.4.

Úloha 7.2. Rozhodněte, zda je podprostorem reálného vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ množina vektorů:

(a) $\left\{\begin{pmatrix}x\\x+y\\2y\end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R}\right\}$, (b) $\left\{\begin{pmatrix}x\\x+1\\2y\end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R}\right\}$, (c) $\left\{\begin{pmatrix}x^2\\2x\\x\end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\right\}$,

(d) $\left\{\begin{pmatrix}0\\-x\\x\end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\right\}$, (e) $\mathbb{Q}^3$, (f) $\left\{\begin{pmatrix}x\\x+y\\2y\end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Q}\right\}$, (g) $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$.

V případech, kdy se jedná o podprostor, jej zapište jako lineární obal vhodných vektorů.

Řešení. Ve všech úlohách máme rozhodnout, zda daná množina je, či není uzavřená násobení reálným skalárem a na sčítání. Negativní odpověď tedy ověříme tak, že najdeme dvojici vektorů z množiny, jejichž součet v množině neleží nebo vektor z množiny, jehož nějaký skalární násobek v množině neleží. Pozitivní odpověď můžeme ověřit přímočaře tak, že pro dvojici vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ množiny a skalár a ukážeme, že $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ a $a\,\mathbf{u}$ opět v dané množině leží. My obvykle zvolíme raději rychlejší argumentaci využívající fakt, že lineární obaly jsou podprostory, kdy ukážeme, že je daná množina lineárním obalem nějakého systému vektorů.

(a) Ano, protože $\left\{\begin{pmatrix} x \\ x+y \\ 2y \end{pmatrix} \mid x,y \in \mathbb{R}\right\} = \left\{x\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} \mid x,y \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{LO}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$.

(b) Ne, neboť vektor $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ leží, zatímco vektor $\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ neleží v $\left\{\begin{pmatrix} x \\ x+1 \\ 2y \end{pmatrix} \mid x,y \in \mathbb{R}\right\}$, protože jak snadno zjistíme, rovnice $\begin{pmatrix} x \\ x+1 \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$ nemá žádné řešení.

(c) Vidíme, že $\begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix} \in \left\{\begin{pmatrix} x^2 \\ 2x \\ x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\right\}$, ovšem kdyby rovnice $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ 2x \\ x \end{pmatrix}$ měla řešení, pak by $1^2 = x^2 = 2$, což je spor. To znamená, že množina není uzavřená na násobení, a tudíž není podprostorem.

(d) Ano, neboť $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ -x \\ x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{LO}\left\{\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$.

(e), (f) Ne, protože třeba $\begin{pmatrix}\pi\\2\pi\\2\pi\end{pmatrix}$ neleží v $\mathbb{Q}^3$ ani v $\left\{\begin{pmatrix} x \\ x+y \\ 2y \end{pmatrix} \mid x,y \in \mathbb{Q}\right\}$, ačkoli $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ v obou podmnožinách leží.

(g) Ano, protože $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\} = \mathrm{LO}\,\emptyset$.

Úloha 7.3. Rozhodněte, zda množina X generuje vektorový prostor $\mathbb{Z}_5^3$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$, jestliže

$$\text{(a)}\quad X = \left\{\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}\right\}, \quad \text{(b)}\quad X = \left\{\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}\right\}, \quad \text{(c)}\quad X = \left\{\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Řešení. (a) Ptáme se, zda každý vektor $\mathbf{y}$ vektorového prostoru $\mathbb{Z}_5^3$ lze napsat jako lineární kombinaci vektorů $\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}\right\}$, tedy zda má řešení soustava $\begin{pmatrix}1 & 3\\3 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Na to má ovšem matice příliš málo sloupců (v odstupňovaném tvaru bude totiž poslední řádek nulový), dané vektory tedy celé $\mathbb{Z}_5^3$ negenerují.

(b) Obdobně jako v (a) řešíme otázku, zda má soustava $\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\3 & 2 & 3\\3 & 4 & 2\end{pmatrix}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ řešení pro každý vektor $\mathbf{y}$.

Upravíme-li matici posloupností elementárních úprav $\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\3 & 2 & 3\\3 & 4 & 2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\0 & 3 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, vidíme, že odstupňovaný tvar matice obsahuje nulový řádek, tudíž existuje vektor pravých stran $\mathbf{y}$, pro který soustava nebude mít řešení. Opět jsme zjistili, že dané vektory celé $\mathbb{Z}_5^3$ negenerují.

(c) Obdobně jako v (b) upravujeme tentokrát matici $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, která je zřejmě regulární. Ke každému $\mathbf{y}$ proto lze nalézt řešení soustavy $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{y}$, což znamená, že daná posloupnost vektorů generuje celé $\mathbb{Z}_5^3$.

Úloha 7.4. Rozhodněte, zda je ve vektorovém prostoru $\mathbb{Z}_7^4$ nad tělesem $\mathbb{Z}_7$ vektor $\mathbf{v}$ lineární kombinací vektorů množiny

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

jestliže

$$\text{(a)} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad \text{(c)} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{(d)} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

V případě, že ano, určete koeficienty této lineární kombinace.

Řešení. Řešíme úlohu, kterou můžeme zapsat rovnicí $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$ pro matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, v jejíchž sloupcích jsou právě vektory množiny X. Řešíme tedy čtyři nehomogenní soustavy rovnic se stejnou maticí levých stran A, proto celou úlohu můžeme řešit pomocí jediné rozšířené matice:

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 4 & 6 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 6 & 6 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & 0 & 6 & 0 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 4 & 6 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 6 & 5 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 4 & 6 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Odtud vidíme, že úlohy (c) a (d) nemají řešení, příslušné vektory tedy neleží v lineárním obalu. Pro úlohy (a) a (b) zjevně existuje (právě jedno) řešení soustavy, tudíž dané vektory jsou lineární kombinací, jejichž koeficienty spočítáme z dané soustavy zpětnou substitucí: (a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Úloha 7.5. Rozhodněte, zda je množina U podprostorem aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{Z}_5^3$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$, jestliže víte, že

(a) $U = \{(0,0,0)^T\}$, (b) $U = \{(0,0,0)^T, (1,2,3)^T\}$, (c) $|U| = 4$ a $U \subseteq \mathbb{Z}_5^3$,

(d) $U = \{(0,0,0)^T, (1,2,3)^T, (2,4,1)^T, (3,1,4)^T, (4,3,2)^T\}$, (e) $|U| = 125$ a $U \subseteq \mathbb{Z}_5^3$, (f) $U = \emptyset$.

Řešení. (a) Protože $(0,0,0)^T + (0,0,0)^T = (0,0,0)^T$ a $t(0,0,0)^T = (0,0,0)^T$ pro každé $t \in T$, je množina $\{(0,0,0)^T\}$ podprostorem $\mathbb{Z}_5^3$.

(b) Vidíme, že $(1,2,3)^T + (1,2,3)^T = 2(1,2,3)^T = (2,4,1)^T \notin U$, takže U není uzavřené na sčítání vektorů (a mimochodem ani na násobení skalárem), a proto není podprostorem.

(c) Je-li $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ nenulový vektor, potom množina $\mathrm{LO}\{\mathbf{u}\} = \{a\,\mathbf{u} \mid a \in \mathbb{Z}_5\}$ obsahuje právě tolik různých vektorů, kolik prvků obsahuje těleso $\mathbb{Z}_5$. Proto čtyřprvkový podprostor (který by nutně obsahoval nenulový vektor) nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ nemůže existovat.

(d) Snadno spočítáme, že $U = \mathrm{LO}\{(1,2,3)^T\}$, jedná se tedy o podprostor.

(e) Všimneme-li si, že 125 prvků má celý aritmetický prostor $\mathbb{Z}_5^3$, vidíme, že $U = \mathbb{Z}_5^3$. Tudíž U skutečně je podprostorem $\mathbb{Z}_5^3$.

(f) Prázdná množina sice triviálně splňuje podmínku uzavřenosti na operace, ale za podprostor ji nepovažujeme.

Další základní příklady k počítání:

Úloha 7.6. Vyjádřete ve vektorovém prostoru $\mathbb{Q}^3$ vektor $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ jako lineární kombinaci vektorů

(a) $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$, (b) $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\6\end{pmatrix}\right)$, (c) $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

Řešení: (a) $\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix}-3\\-4\\3\end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix}$.

Úloha 7.7. Rozhodněte, zda jsou pro obecné těleso T podprostorem

(a) řešení homogenní soustavy rovnic o n neznámých v prostoru T^n,

(b) řešení nehomogenní soustavy rovnic o n neznámých v prostoru T^n,

(c) čtvercové matice, které komutují s danou čtvercovou maticí A, ve vektorovém prostoru všech čtvercových matic stejného stupně,

(d) reálné polynomy v reálném vektorovém prostoru spojitých reálných funkcí,

(e) sudé funkce v reálném vektorovém prostoru všech reálných funkcí.

Řešení: (b) ne, ostatní ano.

Úloha 7.8. Rozhodněte, zda je podprostorem

(a) podmnožina všech reálných posloupností splňujících rekurentní vztah $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+2} = 5a_{n+1} - a_n$ v prostoru $\mathbb{R}^\omega$.

(b) podmnožina všech reálných posloupností splňujících rekurentní vztah $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+2} = 5a_{n+1} - 1$ v prostoru $\mathbb{R}^\omega$.

(c) podmnožina všech horních trojúhelníkových matic v prostoru všech čtvercových matic $n \times n$ nad T.

(d) podmnožina všech neklesajících funkcí v prostoru všech funkcí z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$.

(e) podmnožina všech polynomů, jejichž stupeň není prvočíslo, v prostoru všech polynomů v proměnné x s koeficienty v obecném tělese T.

Řešení: (a), (c) ano, ostatní ne.

Obtížnější příklady:

Úloha 7.9. Označme A, B nenulové matice, R regulární matici. Ukažte na příkladech, že (a) $\operatorname{Ker} AR$ nemusí být rovno $\operatorname{Ker} A$, (b) $\operatorname{Ker} BA$ nemusí být rovno $\operatorname{Ker} A$, (c) $\operatorname{Im} RA$ nemusí být rovno $\operatorname{Im} A$, (d) $\operatorname{Im} AB$ nemusí být rovno $\operatorname{Im} A$.

Úloha 7.10. Nechť V je podprostor aritmetického vektorového prostoru T^n. Existuje soustava lineárních rovnic nad T, která má řešení právě všechny vektory z V? Nalezněte ji pro podprostory z úlohy 7.2.

Úloha 7.11. Ukažte, že pro libovolnou čtvercovou matici A a libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí $\operatorname{Ker} A^n \leq \operatorname{Ker} A^{n+1}$, a $\operatorname{Im} A^n \geq \operatorname{Im} A^{n+1}$. Navíc, pokud pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ platí $\operatorname{Im} A^n = \operatorname{Im} A^{n+1}$, pak pro všechna $j \in \mathbb{N}$ platí, že $\operatorname{Im} A^n = \operatorname{Im} A^{n+j}$. Zformulujte a dokažte i analogické tvrzení pro Ker.

Úloha 7.12. Najděte matici A takovou, aby $\operatorname{Im} A = \operatorname{Ker} A = \operatorname{Im} A^T = \operatorname{Ker} A^T$. Může být taková matice reálná? A komplexní?