Cvičení k přednášce NMAG111 Lineární algebra 1

Zadání

Verze ze dne 5. října 2021

3 Soustavy lineárních rovnic

Cíle cvičení:

- procvičit maticový zápis a výpočet řešení soustavy lineárních rovnic Gaussovou eliminací,
- procvičit pochopení geometrické interpretace SLR jako průniku nadrovin
- vyzkoušet počítání v tělese $\mathbb{Z}_p$.

Řešené příklady:

Úloha 3.1. Zapište soustavu do matice a najděte všechna její reálná řešení:

$$\text{(a)} \quad \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ -2x & + & y & + & 2z & = & 2 \\ x & + & 3y & - & z & = & 0 \end{array} \qquad\qquad \text{(b)} \quad \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ -2x & + & y & + & 2z & = & 2 \end{array}$$

Úloha 3.2. Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic s maticí

$$\text{(a)} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right), \qquad \text{(b)} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right), \qquad \text{(c)} \quad \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Jaká je vzájemná poloha rovin v případě (a)? (Jsou rovnoběžné apod.?) Pokud bychom měnili pravou stranu rovnice, co to znamená geometricky? Pokud změníme pravou stranu, jak může vypadat nová množina řešení (bod, přímka, ...)? Najděte alespoň dvě pravé strany, pro které nějaké řešení soustavy existuje.

Úloha 3.3. Vyřešte soustavy s parametry a, b, $c \in \mathbb{R}$:

$$\text{(a)} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array}\right), \qquad \text{(b)} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array}\right).$$

Jaký mají řešení geometrický tvar? V čem se řešení pro různé hodnoty parametrů liší a v čem jsou stejná?

Úloha 3.4. Pro přirozené p označme $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \ldots, p-1\}$ a na $\mathbb{Z}_p$ zaveďme operace

$$a + b = (a + b) \bmod p, \qquad a \cdot b = (a \cdot b) \bmod p,$$

kde v závorce uvažujeme obvyklé operace na celých číslech a mod p znamená zbytek po celočíselném dělení číslem p. Určete tabulky operací $+$ a $\cdot$ na $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$ a $\mathbb{Z}_5$ a ukažte, že zde pro každé nenulové a existuje b, pro něž $a \cdot b = 1$.

Další základní příklady k počítání:

Úloha 3.5. Sestavte a vyřešte soustavy rovnic pro

(a) kvadratickou funkci $y(x) = ax^2 + bx + c$, jejíž graf prochází body $(-1, 0)$, $(1, 5)$ a $(2, 2)$.

(b) kubickou funkci, jejíž graf prochází body $(-1, 1)$ a $(1, 5)$.

(c) kružnici v rovině, která prochází body $(-3, -1)$, $(1, 7)$ a $(4, 6)$.

(d) kružnici v rovině, která prochází body $(2, 3)$ a $(0, 1)$.

Úloha 3.6. Popište všechna možná řešení soustavy: $\left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 \end{array}\right)$. Má soustava řešení vždy?

Úloha 3.7. Najděte všechna komplexní řešení soustavy rovnic s maticí $\left(\begin{array}{ccc|c} 1+i & 3 & 2-i & 3-i \\ i & 2-i & 1+i & 1-i \end{array}\right)$.

Obtížnější příklady:

Úloha 3.8. Rozhodněte pro, která $a \in \mathbb{R}$ existuje řešení soustavy rovnic s maticí

$$\text{(a)} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right), \qquad \text{(b)} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} a & a & a & 1 \\ a & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2a & a \end{array}\right).$$

Úloha 3.9. Rozhodněte, které dvojice soustav mají stejnou množinu řešení:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 4 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Úloha 3.10. V $\mathbb{Z}_p$ jsme operaci $-$ zatím nedefinovali. Je možné odečítání nějak přirozeně zavést? A co dělení? (Zavedení je spojeno s pojmy opačné číslo a inverzní číslo, analogicky k reálným číslům.) Pokud máte, vyřešte zcela obecně rovnici $ax + b = c$ v $\mathbb{Z}_p$.

Úloha 3.11. Zkuste najít všechna řešení úlohy 3.1 modulo 3.