Cvičení k přednášce NMAG111 Lineární algebra 1

Řešení

Verze ze dne 5. října 2021

3 Soustavy lineárních rovnic

Cíle cvičení:

- procvičit maticový zápis a výpočet řešení soustavy lineárních rovnic Gaussovou eliminací,
- procvičit pochopení geometrické interpretace SLR jako průniku nadrovin
- vyzkoušet počítání v tělese $\mathbb{Z}_p$.

Řešené příklady:

Úloha 3.1. Zapište soustavu do matice a najděte všechna její reálná řešení:

$$\text{(a)}\quad \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ -2x & + & y & + & 2z & = & 2 \\ x & + & 3y & - & z & = & 0 \end{array} \qquad\qquad \text{(b)}\quad \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ -2x & + & y & + & 2z & = & 2 \end{array}$$

Řešení. (a) Sepsání soustavy do matice znamená jen pozičně zapsat údaje rovnice do tabulky

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Matici poté pomocí elementárních úprav upravujeme do odstupňovaného tvaru a úpravy zapisujeme opět pomocí maticového zápisu. Připomeňme, že soustava rovnic nalevo od symbolu $\sim$ má stejnou množinu řešeni jako soustava rovnic napravo od něj:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & 4 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 14 & 9 \end{array}\right).$$

Druhý řádek první upravené matice, který odpovídá rovnici $5y+4z=4$, jsme dostali přičtením dvojnásobku rovnice $x+2y+z=1$ k rovnici $-2x+y+2z=2$ (tedy přičtením dvojnásobku řádku $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$ k řádku $\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$) a podobně třetí řádek vznikl z původního třetího řádku odečtením prvního. V dalším kroku jsme jen přehodili řádky (tedy rovnice) a poté jsme odečetli pětinásobek druhého řádku od třetího. Nyní už výsledek získáme zpětnou substitucí. Z poslední rovnice $14z=9$ okamžitě dostáváme $z=\frac{9}{14}$ a dále dopočítáme

$$y = -1+2z = -1+\frac{9}{7} = \frac{2}{7} \qquad \text{a} \qquad x = 1-2y-z = 1-\frac{4}{7}-\frac{9}{14} = -\frac{3}{14}.$$

Vidíme, že jediné řešení soustavy je $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{14} \\ \frac{2}{7} \\ \frac{9}{14} \end{pmatrix}$.

Uvědomme si, že můžeme k výsledku dospět i v maticovém zápisu, tj. můžeme levou stranu matice posloupností elementárních úprav převést až na jednotkovou matici: :

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{14} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{14} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{14} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{14} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{14} \end{array}\right).$$

(b) Znovu si soustavu zapíšeme do matice a poté ji pomocí přičtení vhodného násobku jedné rovnice k rovnici druhé upravíme stejně jako v předchozí úloze:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{5} & 4 & 4 \end{array}\right),$$

Vidíme, že se pivoty (v druhé matici vyznačeny tučně) nachází v prvním a druhém sloupci a volná proměnná je tedy ta, která odpovídající třetímu sloupci. Nyní si uvědomíme, že dosadíme-li za z libovolnou hodnotu, pak jednoznačně dopočítáme y a x. Položíme-li například $z = 0$, pak z rovnice $5y + 4 \cdot 0 = 4$ dostáváme, že $y = \frac{4}{5}$ a z rovnice $x + 2 \cdot \frac{4}{5} + 0 = 1$ spočítáme, že $x = -\frac{3}{5}$. Našli jsme tedy jedno řešení dané soustavy, které můžeme zapsat do trojice $(x, y, z)^T = (-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0)^T$. Dosadíme-li za z obecný reálný prvek t, můžeme zpětnou substitucí dopočítat y:

$$5y + 4 \cdot t = 4 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{4}{5} - \frac{4}{5}t$$

a poté stejným způsobem i x:

$$x + 2 \cdot y + z = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 1 - 2 \cdot \left(\frac{4}{5} - \frac{4}{5}t\right) - t = -\frac{3}{5} + \frac{3}{5}t.$$

Obecné řešení má tedy tvar

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} + \frac{3}{5}t \\ \frac{4}{5} - \frac{4}{5}t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

a množina všech řešení soustavy je právě

$$\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Uvědomme si geometrický význam řešení dané soustavy: každou z rovnic chápeme jako rovinu v $\mathbb{R}^3$ (tvořenou všemi trojicemi $(x, y, z)^T$, které rovnici řeší) a množina řešení celé soustavy je průnik těchto dvou rovin. Všimneme-li si navíc, že roviny zjevně nejsou rovnoběžné, musí množinu všech řešení tvořit přímka, jejíž jeden bod $(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0)^T$ už jsme našli a jejíž směr je dán vektorem $(3, -4, 5)^T$, který je právě netriviálním řešením soustavy rovnic se stejnými levými a nulovými pravými stranami. Z geometrického náhledu tedy vidíme, že množin všechna řešení je přímka, kterou můžeme vyjádřit ve tvaru $\{(-\frac{3}{5} + 3t, \frac{4}{5} - 4t, 5t)^T \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Úloha 3.2. Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic s maticí

(a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$, (b) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$, (c) $\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right)$.

Jaká je vzájemná poloha rovin v případě (a)? (Jsou rovnoběžné apod.?) Pokud bychom měnili pravou stranu rovnice, co to znamená geometricky? Pokud změníme pravou stranu, jak může vypadat nová množina řešení (bod, přímka, ...)? Najděte alespoň dvě pravé strany, pro které nějaké řešení soustavy existuje.

Řešení. Ve všech případech postupujeme standardně posloupností elementárních úprav:

(a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right), \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right), \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right),$$

Vidíme, že původní soustava je ekvivalentní se soustavou požadující rovnost $0 = 2$, tedy množina řešení je prázdná. Z obecných rovnic rovin (tedy z řádků soustavy) vidíme, že jsou jednotlivé roviny různoběžné, tedy nutně přímka určená průnikem dvou rovin je rovnoběžná (bez společného bodu) se zbývající rovinou. Soustava bude mít řešení například pro vektory pravých stran $(0,0,0)^T$ nebo $(0,1,1)^T$. Není těžké si uvědomit, že soustava bude mít řešení právě pro vektory pravých stran tvaru $(a, b, b-a)^T$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ a množina řešení bude v takovém případě přímka.

(b)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{5} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Obdrželi jsme matici hodnosti 3 s čtvrtým volným sloupcem (pivoty jsme opět vyznačili tučně). Zvolíme-li opět za čtvrtou neznámou u parametr libovolnou reálnou hodnotu t, dopočítáme zpětnou substitucí:

$$z = \frac{3}{5} - \frac{2}{5}t, \quad y = -\frac{1}{5} - \frac{1}{5}t, \quad x = \frac{2}{5} - \frac{3}{5}t.$$

Zjistili jsme, že

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

je množina všech řešení soustavy. Můžeme zkusit i najít hezčí, celočíselné řešení. Z odstupňovaného tvaru tipneme a ověříme, že čtveřice $(1, 0, 1, -1)^T$ rovněž řeší danou soustavu. Vektor $(\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, 1)^T$ řeší homogenní variantu naší soustavy (tj. stejné levé strany, nulové pravé strany), a tedy ji řeší i jeho pětinásobek, vektor $(3, 1, 2, -5)^T$. Vidíme tedy, že množinu všech řešení také můžeme popsat ve tvaru

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(c)

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 & 3 & 1 \end{array}\right).$$

Získali jsme odstupňovanou matici, v níž jsou bez pivotů 2., 4., 5. a 6. sloupec, tedy volné jsou jim odpovídající proměnné. Označíme-li si neznámé postupně $x_1, \ldots, x_6$, pak pro libovolná $t_2, t_4, t_5, t_6 \in \mathbb{R}$ položíme

$$x_2 = t_2, \quad x_4 = t_4, \quad x_5 = t_5, \quad x_6 = t_6$$

a zpětnou substitucí dopočítáme

$$x_3 = 1 + 2t_4 + 5t_5 - 3t_6 \quad \text{a poté} \quad x_1 = 1 - t_2 - t_4 - 2t_5 + t_6.$$

Nyní obvyklým způsobem popíšeme množinu všech řešení soustavy:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_5 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_6 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t_2, t_4, t_5, t_6 \in \mathbb{R} \right\}$$

Úloha 3.3. Vyřešte soustavy s parametry a, b, $c \in \mathbb{R}$:

$$\text{(a)} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array}\right), \qquad \text{(b)} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array}\right).$$

Jaký mají řešení geometrický tvar? V čem se řešení pro různé hodnoty parametrů liší a v čem jsou stejná?

Řešení. Obě soustavy mají matice v odstupňovaném tvaru, proto stačí zpětnou substitucí přímočaře spočítat

(a) parametrický popis řešení $\left\{ \begin{pmatrix} a-b \\ b \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$,

(b) bod $\begin{pmatrix} a-b+c \\ b-c \\ c \end{pmatrix}$

Vidíme, že v úloze (a) je řešením vždy přímka, jejíž směr nezávisí na parametrech a, b a v úloze (b) jde vždy o bod, jehož umístění závisí na parametrech a, b, c.

Úloha 3.4. Pro přirozené p označme $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \ldots, p-1\}$ a na $\mathbb{Z}_p$ zaveďme operace

$$a + b = (a + b) \bmod p, \qquad a \cdot b = (a \cdot b) \bmod p,$$

kde v závorce uvažujeme obvyklé operace na celých číslech a mod p znamená zbytek po celočíselném dělení číslem p. Určete tabulky operací $+$ a $\cdot$ na $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$ a $\mathbb{Z}_5$ a ukažte, že zde pro každé nenulové a existuje b, pro něž $a \cdot b = 1$.

Řešení. Tabulky operací určíme přímočarým výpočtem. Pro $\mathbb{Z}_2$ máme

+	**0**	**1**
0	0	1
1	1	0

·	**0**	**1**
0	0	0
1	0	1

pro $\mathbb{Z}_3$

+	**0**	**1**	**2**
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

·	**0**	**1**	**2**
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

a pro $\mathbb{Z}_5$

+	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

·	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Na každém řádku příslušném nenulovému prvku a najdeme ve všech tabulkách násobení hodnotu 1, nachází-li se ve sloupci příslušném hodnotě b, pak $a \cdot b = 1$.

Další základní příklady k počítání:

Úloha 3.5. Sestavte a vyřešte soustavy rovnic pro

(a) kvadratickou funkci $y(x) = ax^2 + bx + c$, jejíž graf prochází body $(-1, 0)$, $(1, 5)$ a $(2, 2)$.

(b) kubickou funkci, jejíž graf prochází body $(-1, 1)$ a $(1, 5)$.

(c) kružnici v rovině, která prochází body $(-3, -1)$, $(1, 7)$ a $(4, 6)$.

(d) kružnici v rovině, která prochází body $(2, 3)$ a $(0, 1)$.

Řešení: (a) $-\frac{1}{6}(11x^2 - 15x - 26)$, (b) $\{tx^3 + sx^2 + (2-t)x + (3-s) \mid t, s \in \mathbb{R}\}$,
(c) $\{(x, y) \mid (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5^2\}$, (d) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 - 2tx + (2t-6)y + 5 - 2t = 0\} \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Úloha 3.6. Popište všechna možná řešení soustavy: $\left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 \end{array}\right)$. Má soustava řešení vždy?

Úloha 3.7. Najděte všechna komplexní řešení soustavy rovnic s maticí $\left(\begin{array}{ccc|c} 1+i & 3 & 2-i & 3-i \\ i & 2-i & 1+i & 1-i \end{array}\right)$.

Řešení: $\left\{ \begin{pmatrix} -3-5i \\ 0 \\ 3i-1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -7 \\ i \\ 2+3i \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{C} \right\}$

Obtížnější příklady:

Úloha 3.8. Rozhodněte pro, která $a \in \mathbb{R}$ existuje řešení soustavy rovnic s maticí

$$\text{(a)} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right), \qquad \text{(b)} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} a & a & a & 1 \\ a & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2a & a \end{array}\right).$$

Řešení: (a) pouze pro $a = \frac{5}{3}$, (b) pro $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{2}, 2\}$

Úloha 3.9. Rozhodněte, které dvojice soustav mají stejnou množinu řešení:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 4 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Řešení: 1. a 3.

Úloha 3.10. V $\mathbb{Z}_p$ jsme operaci $-$ zatím nedefinovali. Je možné odečítání nějak přirozeně zavést? A co dělení? (Zavedení je spojeno s pojmy opačné číslo a inverzní číslo, analogicky k reálným číslům.) Pokud máte, vyřešte zcela obecně rovnici $ax + b = c$ v $\mathbb{Z}_p$.

Úloha 3.11. Zkuste najít všechna řešení úlohy 3.1 modulo 3.