Cvičení k přednášce NMAG111 Lineární algebra 1

Řešení, verze ze dne 5. října 2021

2 Opakování: zobrazení

Cíl cvičení: zopakovat pojem zobrazení a procvičit zjišťování jeho vlastností

Řešené příklady:

Zaveďme následující značení geometrických zobrazení roviny $\mathbb{R}^2$ do sebe:

R_φ – otočení se středem v počátku $(0,0)$ o úhel φ (proti směru hodinových ručiček),

O_x, resp. O_y – osová souměrnost podle osy x, resp. y,

P_x, resp. P_y – kolmá projekce na osu x, resp. y.

Úloha 2.1. Uvažujme zobrazení O_x, O_y, P_x, P_y a R_φ pro všechna φ (každý úhel určuje jedno zobrazení).

(a) Která ze zobrazení jsou prostá a která jsou na celé $\mathbb{R}^2$?

(b) Pro každé zobrazení najděte úplný vzor bodu $(0,1)$ a úplný vzor bodu $(1,1)$.

(c) Pro všechna bijektivní zobrazení určete zobrazení inverzní.

(d) Popište složená zobrazení $O_x \circ O_y$, $P_x \circ P_y$, $R_\varphi \circ R_\psi$.

(e) Jak zobrazení O_x a P_x transformují přímku s obecným tvarem $\{(x,y) \mid x+2y=1\}$? Nakreslete si obrázek.

Řešení. (a) Libovolné dva různé body se při zobrazení R_φ, O_x a O_y zobrazí na různé body, tato zobrazení jsou proto prostá. Na druhou stranu, P_x není prosté zobrazení, protože například body $(2,3)$ a $(2,4)$ se zobrazí na tentýž bod $(2,0)$. Podobně, zobrazení P_y rovněž není prosté.

Každý bod $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ má při zobrazení R_φ vzor, je jím bod $R_{-\varphi}(\mathbf{b})$. Pro libovolný úhel φ je tedy R_φ zobrazení „na“. Zobrazení O_x, O_y jsou rovněž „na“, vzor bodu $\mathbf{b}$ je po řadě $O_x(\mathbf{b})$ a $O_y(\mathbf{b})$. Zobrazení P_x není na, protože například bod $(4,5)$ nemá vzor (obor hodnot je osa x – množina $\{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$). Podobně, zobrazení P_y není „na“.

(b) Hledáme množinu všech bodů, které se při daných zobrazení zobrazí na $(0,1)$, resp. $(1,1)$. Pro zobrazení O_x, O_y, P_x a P_y jde vzory určit snadno z nákresu (nakreslete si ho!): úplný vzor bodu $(0,1)$ při zobrazení O_x, O_y, P_x a P_y je po řadě

$$\{(0,-1)\},\ \{(0,1)\},\ \emptyset,\ \{(x,1) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

a vzory bodu $(1,1)$ jsou

$$\{(1,-1)\},\ \{(-1,1)\},\ \emptyset,\ \emptyset.$$

Jediným vzorem bodu $(0,1)$ při rotaci o φ je bod $(0,1)$ zrotovaný o $-\varphi$. To je bod na jednotkové kružnici odpovídající úhlu $\pi/2-\varphi$. Úplným vzorem tohoto bodu je tedy množina

$$\{(\cos(\pi/2-\varphi), \sin(\pi/2-\varphi))\} = \{(\sin\varphi, \cos\varphi)\}$$

Jediným vzorem bodu $(1,1)$ při rotaci o φ je bod na kružnici o poloměru $\sqrt{2}$ se středem v počátku, který odpovídá úhlu $\pi/4-\varphi$. Hledaný úplný vzor je proto

$$\{(\sqrt{2}\cos(\pi/4-\varphi), \sqrt{2}\sin(\pi/4-\varphi))\}.$$

Poznamenejme, že tento výraz lze upravit na

$$\{(\cos\varphi + \sin\varphi, -\sin\varphi + \cos\varphi)\}.$$

(c) Geometrickou úvahou určíme $O_x^{-1} = O_x$, $O_y^{-1} = O_y$, $R_\varphi^{-1} = R_{-\varphi}$.

(d) Pro libovolný bod $\mathbf{b}$ je bod $O_x(O_y(\mathbf{b}))$ středově symetrický k $\mathbf{b}$ podle počátku. Protože středová symetrie je totéž co rotace o π, můžeme psát $O_x \circ O_y = R_\pi$. Dále $P_x(P_y(\mathbf{b})) = (0,0)$, takže $P_x \circ P_y$ přiřazuje každému bodu počátek. Pro složení dvou rotací máme zjevně $R_\varphi \circ R_\psi = R_{\varphi+\psi}$.

(e) Obrazem dané přímky je při uvažovaných zobrazení přímka, přičemž její normálový vektor i některý z bodů snadno nahlédneme z obrázku. Z těchto informací získáme obecnou rovnici. Obrazy dané přímky při zobrazení O_x a P_x jsou po řadě

$$\{(x,y) \mid x - 2y = 1\},\ \{(x,y) \mid y = 0\}.$$

Výsledek jsme mohli obdržet rovněž analytickou úvahou: mohli jsme si rozmyslet, že normálový vektor $(1,-2)$ na vektor $(1,2)$ a například bod $(1,0)$ zobrazí symetrie O_x na týž bod $(1,0)$ (nebo jsme mohli zobrazit dva různé body přímky $O_x(1,0) = (1,0)$ a $O_x(3,1) = (3,-1)$) a z těchto údajů získat obecnou rovnici zobrazené přímky. Podbně platí $P_x(a,b) = (a,0)$ pro každý bod přímky, kde za a můžeme zvolit libovolné reálné číslo.

Úloha 2.2. Uvažujme zobrazení $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ daná předpisem

$$f((x,y)) = (3x + 2y, 2x + y), \quad g((x,y)) = (2x - y, -4x + 2y).$$

(a) Rozhodněte, zda jsou zobrazení f a g na (to je jednodušší) a zda jsou prostá.

(b) Najděte úplný vzor bodů $(-1,2)$ a $(1,0)$.

(c) Popište podobným vzorečkem složená zobrazení $f \circ g$, $g \circ f$.

(d) Jak zobrazení f a g transformují přímku s parametrickým vyjádřením $\{(1,1) + s(1,-1) \mid s \in \mathbb{R}\}$?

Řešení. (a) K rozhodnutí, zda f je prosté zobrazení, potřebujeme zjistit, zda existují různé dvojice $(x,y) \neq (x',y')$, pro které platí $f((x,y)) = f(x',y')$ (v takovém případě není f prosté, jinak ano). Vztah $f((x,y)) = f(x',y')$ se z definice zobrazení f přepíše na

$$(3x + 2y, 2x + y) = (3x' + 2y', 2x' + y'),$$

ekvivalentně

$$3x + 2y = 3x' + 2y' \text{ a } 2x + y = 2x' + y'.$$

Označíme-li $a = x - x'$ a $b = y - y'$, máme po drobné úpravě

$$3a + 2b = 0 \text{ a } 2a + b = 0.$$

Tato soustava má jediné řešení $a = b = 0$. To znamená, že $x = x'$ a $y = y'$. Zjistili jsme, že $f((x,y)) = f((x',y'))$ platí jen tehdy, když $x = x'$ a $y = y'$. Zobrazení f je tedy prosté.

Zobrazení g není prosté, protože (například) $g(0,0) = g(1,2) = 0$. Přijít na to jde podobným postupem jako pro f. Zjistíme, že příslušná soustava má jiné než triviální řešení $(a,b) = (0,0)$, například $(a,b) = (1,2)$. Pro libovolnou volbu (x',y') a $(x,y) = (x'+1, y'+2)$ máme $f((x,y)) = f((x',y'))$.

K rozhodnutí, zda f je na, chceme zjistit, zda pro každé $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ existuje dvojice $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ taková, že $f((x,y)) = (u,v)$ (v takovém případě je f na, jinak není). Jinými slovy, má pro každé $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ následující soustava řešení?

$$3x + 2y = u \text{ a } 2x + y = v$$

Soustavu vyřešíme třeba vyjádřením $y = v - 2x$ z druhé rovnice a dosazením do první. Vyjde

$$(x, y) = (-u + 2v, 2u - 3v)$$

(O správnosti se raději přesvědčíme zkouškou.) Každý vektor (u, v) má při zobrazení f vzor, f je proto na. (Pozn.: navíc v tomto případě vidíme, že každý vektor má právě jeden vzor. Zobrazení f je tedy bijekcí, tedy je prosté i na.)

Pro g postupujeme obdobně. Máme soustavu

$$2x - y = u \text{ a } -4x + 2y = v$$

Vynásobením první rovnice (-2) dostáváme $-4x + 2y = -2u$ a srovnáním s druhou rovnicí dostáváme $-2u = v$. Soustava má proto řešení jen tehdy, když $v = -2u$. Protože ne každý vektor z $\mathbb{R}^2$ má vzor (například $(u, v) = (1, 0)$), zobrazení g není na.

(b) Odpovědi odvodíme z řešení předchozího bodu. Bod (x, y) je vzorem $(-1, 2)$ právě tehdy, když $(x, y) = (-(-1) + 2 \cdot 2, 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 2) = (5, -8)$. Úplným vzorem bodu $(-1, 2)$ je tedy $\{(5, -8)\}$. Podobně, úplným vzorem $(1, 0)$ při zobrazení f je $\{(-1, 2)\}$.

Pro bod $(u, v) = (-1, 2)$ platí $v = -2u$, takže tento bod má vzor a úplný vzor je

$$\{(x, y) \mid 2x - y = -1\}.$$

Úplným vzorem bodu $(1, 0)$ při zobrazení g je prázdná množina, protože žádné řešení rovnice $g(x, y) = (1, 1)$ podle (a) neexistuje.

(c)

$$\begin{aligned} f \circ g((x, y)) &= f(g((x, y))) = f((2x - y, -4x + 2y)) \\ &= (3(2x - y) + 2(-4x + 2y), 2(2x - y) + (-4x + 2y)) = (-2x + y, 0) \\ g \circ f((x, y)) &= g(f((x, y))) = g((3x + 2y, 2x + y)) \\ &= (2(3x + 2y) - (2x + y), -4(3x + 2y) + 2(2x + y)) = (4x + 3y, -8x - 6y) \end{aligned}$$

(d) Obrazem dané přímky při zobrazení f je

$$\begin{aligned} \{f((1, 1) + s(1, -1)) \mid s \in \mathbb{R}\} &= \{f((1 + s, 1 - s)) \mid s \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(3(1 + s) + 2(1 - s), 2(1 + s) + (1 - s)) \mid s \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(5 + s, 3 + s) \mid s \in \mathbb{R}\} = \{(5, 3) + s(1, 1) \mid s \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Úloha 2.3. Jak podobným vzorečkem jako v úloze 2.2 popsat zobrazení O_x, O_y, P_x, P_y a $R_{\frac{\pi}{2}}$?

Řešení. Obraz bodu $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ je ve všech případech patrný z nákresu. Pro rotaci je třeba si rozmyslet, že vzorec funguje v jakémkoliv kvadrantu: $O_x((x, y)) = (x, -y)$, $O_y((x, y)) = (-x, y)$, $P_x((x, y)) = (x, 0)$, $P_y((x, y)) = (0, y)$, $R_{\pi/2}((x, y)) = (-y, x)$.

Další základní příklady k počítání:

Úloha 2.4. Uvažujme zobrazení $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ daná předpisem

$$F((x, y, z)) = (x + y - z, x - 2y + z), \quad G((x, y)) = (x + y, x - 3y, 2x - y).$$

(a) Rozhodněte, zda jsou zobrazení F a G prostá a zda jsou na.

(b) Najděte úplný vzor bodu $(1, 1)$ v zobrazení F.

(c) Popište obraz přímky $p = \{(1,1) + s(1,-1) \mid s \in \mathbb{R}\}$ při zobrazení G.

(d) Popište vzorečkem složená zobrazení $F \circ G$, $G \circ F$ a rozhodněte, zda jsou tato zobrazení prostá a zda jsou na.

Řešení: (a) F je na a není prosté, G není na a je prosté, (b) $F^{-1}((1,1)) = \{(1,0,0) + s(1,2,3) \mid s \in \mathbb{R}\}$,

(c) $G(p) = \{(2,-2,1) + s(0,4,3) \mid s \in \mathbb{R}\}$, (d) $FG((x,y)) = (-y, x+6y)$ je prosté a na,

$GF((x,y,z)) = (2x - y, -2x + 7y - 4z, x + 4y - 3z)$ není ani prosté, ani na.

Úloha 2.5. Pro zobrazení $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dané předpisem $f((x,y)) = (x+y, y)$ určete (a) obraz čtverce s vrcholy $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, (b) obraz množiny $\mathbb{Z}^2$. Proveďte totéž pro zobrazení $g((x,y)) = (2x, 3y)$.

Řešení: Pro f: (a) rovnoběžník s vrcholy $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(2,1)$ (b) celé $\mathbb{Z}^2$,

pro g: (a) obdélník s vrcholy $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,3)$, $(2,3)$ (b) $\{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \mid\ 2/a, 3/b\}$.

Úloha 2.6. Pro následující zobrazení $f : X \to Y$ určete (i) počet zobrazení $g : Y \to X$, pro která $g \circ f = \mathrm{id}_X$; (ii) počet zobrazení $g : Y \to X$, pro která $f \circ g = \mathrm{id}_Y$; (iii) počet zobrazení $g : Y \to X$, pro která $g \circ f = \mathrm{id}_X$ a $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

(a) $f : \{1,2,3\} \to \{1,2,3,4,5\}$, $f(1) = 3$, $f(2) = 1$, $f(3) = 5$,

(b) $f : \{1,2,3,4,5,6\} \to \{1,2,3\}$, $f(1) = f(3) = f(5) = 2$, $f(2) = f(6) = 1$, $f(4) = 3$,

(c) $f : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$, $f(1) = 2$, $f(2) = 4$, $f(3) = 3$, $f(4) = 1$.

Řešení: (a) 9, 0, 0, (b) 0, 6, 0, (c) 1, 1, 1.

Obtížnější příklady:

Úloha 2.7. Popište vzorečkem zobrazení R_φ.

Řešení: $R_\varphi(x,y) = (x\cos\varphi - y\sin\varphi, x\sin\varphi + y\cos\varphi)$

Úloha 2.8. Najděte parametrické vyjádření obrazu přímky $\{(x,y) \mid x + 2y = 1\}$ při zobrazení R_φ.

Řešení: například $\{(\cos\varphi, \sin\varphi) + s(2\cos\varphi + \sin\varphi, 2\sin\varphi - \cos\varphi) \mid s \in \mathbb{R}\}$

Úloha 2.9. Popište složená zobrazení $O_x \circ R_\varphi$ a $R_\varphi \circ O_x$ a mocniny zobrazení R_φ^n, $n \in \mathbb{Z}$.

Řešení: $[O_x \circ R_\varphi]((x,y)) = (x\cos\varphi - y\sin\varphi, -x\sin\varphi - y\cos\varphi)$,

$[R_\varphi \circ O_x]((x,y)) = (x\cos\varphi + y\sin\varphi, x\sin\varphi - y\cos\varphi)$, $R_\varphi^n = R_{n\varphi}$.

Úloha 2.10. Označme $\mathbf{n} = (a,b)$ nenulový vektor v $\mathbb{R}^2$, $O_\mathbf{n}$ osovou souměrnost podle přímky $p : ax + by = 0$ a $P_\mathbf{n}$ kolmou projekci na tuto přímku. Zapište tato zobrazení podobným vzorcem jako v úloze 2.2.

Řešení: $O_\mathbf{n}((x,y)) = (\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}x - \frac{2ab}{a^2+b^2}y, -\frac{2ab}{a^2+b^2}x + \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}y)$, $P_\mathbf{n}((x,y)) = (\frac{b^2}{a^2+b^2}x - \frac{ab}{a^2+b^2}y, -\frac{ab}{a^2+b^2}x + \frac{a^2}{a^2+b^2}y)$.

Úloha 2.11. Uvažujte následující zobrazení komplexní roviny do sebe:

(a) $d_k(z) = kz$, kde $k \in \mathbb{R}$;

(b) $r_\varphi(z) = (\cos\varphi + i \sin\varphi)z$, kde $\varphi \in \mathbb{R}$;

(c) $p_b(z) = z + b$, kde $b \in \mathbb{C}$.

Popište tato zobrazení geometricky a napište vzorce pro reálnou a imaginární část obrazu čísla z pomocí reálné a imaginární části $z = x + iy$. Popište inverzní zobrazení, mocniny těchto zobrazení a porovnejte $r_{\pi/2} \circ p_i$ a $p_i \circ r_{\pi/2}$. Zapište pomocí standardních operací na komplexních číslech osovou souměrnost podle reálné a podle imaginární osy.

Úloha 2.12. Podobně jako v úloze 2.2 popište vzorcem následující zobrazení $\mathbb{R}^3$ do sebe:

(a) Zrcadlení podle roviny obsahující osy x a z.

(b) Zrcadlení podle osy x.

(c) Rotaci okolo osy y o úhel φ.

(d) Rotaci okolo osy prvního oktantu, která cyklicky zobrazuje kladné polopřímky os x, y a z na sebe.

A ještě obtížnější příklady:

Úloha 2.13. Popište zobrazení $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vzniklá

(a) složením dvou osových symetrií podle přímek procházejících počátkem,

(b) složením rotace kolem počátku a osové symetrie podle přímky procházející počátkem (obě možnosti pořadí skládání).

Úloha 2.14. Najděte zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, které je prosté, ale není na.

Úloha 2.15. Najděte zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, které je na, ale není prosté.

Úloha 2.16. Mějme zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, které splňuje

- pro každou dvojici aritmetických vektorů $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ platí $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$
- pro každý aritmetický vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ a každý skalár $t \in \mathbb{R}$ platí $f(t \cdot \mathbf{x}) = t \cdot f(\mathbf{x})$.

Dokažte, že f je prosté právě tehdy, když je na.