Úlohy k přednášce NMAG 102: Lineární algebra a geometrie 2, 2016

Verze ze dne 16. května 2016

Toto je seznam přímočarých příkladů k přednášce. Úlohy z tohoto seznamu je nezbytně nutné umět řešit.

0 Opakování

Základní úlohy

0.1. Nechť $B = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ a $C = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right)$ jsou posloupnosti vektorů lineárního prostoru $\mathbb{R}^3$.

(a) Ověřte, že jsou B a C báze,

(b) spočítejte souřadnice $[\mathbf{u}]_B$ a $[\mathbf{u}]_C$ pro $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

(c) najděte souřadnice $[\mathbf{v}]_C$ vektoru $\mathbf{v}$, víte-li, že $[\mathbf{v}]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

(d) najděte matici vůči kanonickým bázím lineárního zobrazení φ, pro něž $\varphi([\mathbf{v}]_C) = [\mathbf{v}]_B$.(Pozor na možnost zmatku mezi bázemi: $[\mathbf{v}]_C$ je opět vektor, který můžeme vyjadřovat v souřadnicích vůči různým bázím.)

Pro lineární operátor $\varphi : V \to V$ a bázi B prostoru V označme $[\varphi]_B := [\varphi]_B^B$.

0.2. Je-li $[f]_{K_2}^M = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ je matice lineárního zobrazení $f : \mathbb{Z}_7^2 \to \mathbb{Z}_7^2$ vzhledem k bázi $M = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ a kanonické bázi K_2 prostoru $\mathbb{Z}_7^2$, spočítejte matice $[f]_M$ a $[f]_{K_2}$.

(Připomeňte si dva způsoby, jak invertovat matici řádu 2.)

0.3. Pro lineární operátor g na prostoru $\mathbb{Z}_5^2$ daný vztahy $g(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ a $g(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ určete matici $[g]_{K_2}$.

(Najděte různé způsoby řešení úlohy.

a) Jak nejsnáze najít $g(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$? Jak souvisí s maticí $[g]_{K_2}$?

b) Vzhledem ke kterým bázím dokážete matici g napsat bez počítání? Jaká volba bází je vhodná pro řešení úlohy? Jak vyjde $[g]_{K_2}^A$, kde $A = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$)

0.4. Jestliže $[h]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ je matice lineárního operátoru h na prostoru $\mathbb{R}^3$ vzhledem bázi B z příkladu 0.1, najděte matici $[h]_{K_3}$ a jádro h.

(Lze vidět jádro zobrazení h už z matice $[h]_B^B$? Připomeňte si příslušné tvrzení ($\mathrm{Ker}\,[h]_D^C = [\mathrm{Ker}\,h]_C$). Jak by se postup hledání jádra lišil, kdybychom měli matici $[h]_K^B$?)

Doplňující úlohy

0.5. Popište lineární zobrazení φ a ψ, pro něž $\varphi(B) = C$ a $\psi(C) = B$ (s ohledem na pořadí vektorů).

Řešení:

1. (b) $[\mathbf{u}]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $[\mathbf{u}]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, (c) $[\mathbf{u}]_C = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, (d) $[\varphi]_{K_3}^{K_3} = [\mathrm{Id}]_B^C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{2}{3} \\ -2 & \frac{3}{2} & \frac{-4}{3} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$.
2. $[f]_M = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$ a $[f]_{K_2} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.
3. $[g]_{K_2} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$.
4. $[h]_{K_3} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ -5 & 5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{Ker}\,(h) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$.
5. Pokud sloupce matic B a C jsou vektory příslušných bazí, pak $[\varphi]_{K_3}^{K_3} = BC^{-1}$, $[\psi]_{K_3}^{K_3} = CB^{-1}$

1 Skalární součin 1: kolmost

Základní úlohy

1.1. Uvažujme standardní skalární součin $\cdot$ na reálném prostoru $\mathbb{R}^3$ a nechť $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

(a) Spočítejte $\|\mathbf{u}\|$, $\|\mathbf{v}\|$ a úhel, který svírají vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$,

(b) najděte podprostor všech vektorů prostoru $\mathbb{R}^3$, které jsou kolmé na $\mathbf{u}$,

(c) najděte podprostor všech vektorů prostoru $\mathbb{R}^3$, které jsou kolmé na $\mathbf{v}$,

(d) najděte všechny vektory prostoru $\mathbb{R}^3$ kolmé zároveň na $\mathbf{u}$ i na $\mathbf{v}$.

1.2. Najděte bázi ortogonálního doplňku podprostoru $U = \langle (1,2,1,1,1)^T, (0,-1,1,1,2)^T \rangle$ reálného vektorového prostoru $\mathbb{R}^5$ se standardním skalárním součinem.

1.3. V komplexním vektorovém prostoru $\mathbb{C}^3$ se standardním skalárním součinem $\cdot$ určete ortogonální doplněk roviny $\big\langle (3+i, -2-i, 2)^T, (2-i, -2, 1)^T \big\rangle$.

1.4. Skalární součin na $\mathbb{R}^2$ je dán předpisem

$$\langle \mathbf{u} \,|\, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^T \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{v} \ .$$

Spočítejte normu vektorů vektory $\mathbf{u} = (2,3)^T$ a $\mathbf{v} = (1,4)^T$ a úhel mezi nimi.

1.5. V prostoru $\mathbb{R}^2$ se skalárním součinem $\langle \,|\, \rangle$ je $B = ((1,1)^T, (2,-1)^T)$ ortonormální báze. Určete

(a) $\big\langle (1,4)^T \,\big|\, (2,0)^T \big\rangle$,

(b) ortogonální doplněk přímky $\big\langle (4,1)^T \big\rangle$.

1.6. Skalární součin na $\mathbb{C}^2$ je dán předpisem $\langle \mathbf{u} \,|\, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^* \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{v}$. Najděte

(a) všechny vektory kolmé na vektor $\mathbf{u} = (1, i)^T$,

(b) nějakou ortonormální bázi.

1.7. Jsou-li $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ vektory v reálném aritmetickém vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem,

(a) ověřte, že $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ je ortonormální báze $\mathbb{R}^3$,

(b) spočítejte souřadnice vektorů $(0,0,1)^T$, $(2,1,0)^T$ a $(1,2,3)^T$ vzhledem k ortonormální bázi B,

(c) určete ortogonální projekce vektorů $(0,0,1)^T$, $(2,1,0)^T$ do podprostoru $U = \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle$.

Doplňující úlohy

1.8. Je-li $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ i & -2 \end{pmatrix}$, definujme zobrazení $\langle \,|\, \rangle$, které dvojici vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ z komplexního lineárního prostoru $\mathbb{C}^2$ přiřadí hodnotu $\langle \mathbf{u} \,|\, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^* \, \mathbf{A}^* \mathbf{A} \, \mathbf{v}$.

(a) Dokažte, že je $\langle\,|\,\rangle$ skalární součin,

(b) spočítejte $\|\mathbf{e}_1\|$, $\|\mathbf{e}_2\|$, $\| \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \|$, $\langle \mathbf{e}_1 \,|\mathbf{e}_2 \,\rangle$ a $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\rangle$,

(c) najděte bázi podprostoru všech vektorů prostoru $\mathbb{C}^2$, které jsou kolmé na $\mathbf{e}_1$ vzhledem ke skalárnímu součinu $\langle\,|\,\rangle$,

(d) najděte ortonormální bázi $\mathbb{C}^2$ vzhledem ke skalárnímu součinu $\langle\,|\,\rangle$,

1.9. Spočítejte normu polynomu $2ix + (3i - 4)$ vzhledem ke skalárnímu součinu $\langle f\,|g\,\rangle = \int_{-1}^{1} \overline{f}g$.

Řešení:

1. (a) $\|\,\mathbf{u}\,\| = \sqrt{6}$, $|\,\mathbf{v}\,\| = \sqrt{6}$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$.
   (b) $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$, (c) $\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$, (d) $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.
2. Například $((-3, 1, 1, 0, 0)^T, (-3, 1, 0, 1, 0)^T, (-5, 2, 0, 0, 1)^T)$.
3. $\langle (1, 1 + i, i)^T \rangle$
4. $\|\,\mathbf{u}\,\| = |\,\mathbf{v}\,\| = \sqrt{5}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.
5. (a) 2, (b) $(3, 3)^T$.
6. (a) $\langle \begin{pmatrix} 2+i \\ 5+2i \end{pmatrix} \rangle$, (b) Například $\left(\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$ nebo $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$
7. (b) $\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$, (c) $\frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.
8. (b) 1, 5, 5, $2i$, -7, (c) $\begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix}$ (d) $(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix})$.

2 Skalární součin 2: ortogonální projekce a ortogonalizace

Základní úlohy

2.1. V prostoru $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem určete ortogonální projekci vektoru $(1, 2, 3)^T$ na přímku $\langle (4, 5, 6)^T \rangle$.

2.2. V prostoru $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem určete nejlepší aproximaci vektoru $(1, 2, 4)^T$ v rovině $\langle (1, 2, 1)^T, (2, 1, -1)^T \rangle$ a chybu této aproximace.

2.3. V prostoru $\mathbb{R}^3$ uvažujme skalární součin $\langle \mathbf{u}\,|\mathbf{v}\,\rangle = \mathbf{u}^T \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{v}$ a vektory $\mathbf{u}_1 = (1, 0, -1)^T, \mathbf{u}_2 = (0, 2, 1)^T$. Spočítejte

(a) nejlepší aproximaci vektoru $\mathbf{u}_2$ v přímce $\langle \mathbf{u}_1 \rangle$ a chybu této aproximace,

(b) Grammovu matici $(\langle \mathbf{u}_i \,|\mathbf{u}_j \,\rangle)$ pro posloupnost $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$,

(c) nejlepší aproximaci vektoru $(1, 0, 0)$ v podprostoru $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle$.

2.4. Metodou nejmenších čtverců najděte nejlepší aproximaci řešení soustav

$$(a) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{array} \right) \quad , \quad (b) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \quad .$$

2.5. V prostoru $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem ortogonalizujte bázi M a k nalezené ortogonální bázi určete příslušnou ortonormální, jestliže $M =$

(a) $((1,1,0)^T,\ (0,1,1)^T,\ (1,1,1)^T)$, (b) $((1,1,0)^T,\ (1,3,2)^T,\ (2,1,0)^T)$.

2.6. Najděte QR rozklady reálných matic:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2.7. V prostoru $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem najděte ortonormální bázi podprostoru $W = \langle((1,1,-2,1)^T$, $(2,0,1,0)^T$, $(0,1,0,1)^T\rangle$.

2.8. Pro soustavy rovnic $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -1 & 16 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 10 \end{array}\right)$ spočítejte řešení s nejmenší normou.

Doplňující úlohy:

2.9. V prostoru $\mathbb{R}^3$ se součinem $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^T \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{v}$ ukažte, že se jedná o skalární skalárním a ortogonalizujte a normalizujte kanonickou bázi.

2.10. Napište matici ortogonální projekce reálného vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$ se standardním skalárním součinem na přímku $\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ vzhledem ke kanonickým bázím.

Řešení:

1. $\frac{32}{77}(4,5,6)^T$
2. aproximace $= (0,3,3)^T$ a chyba $= (1,-1,1)^T$
3. (a) aproximace $= \frac{1}{4}(1,0,-1)^T$ a chyba $= \frac{1}{4}(-1,8,5)^T$,
   (b) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}$, (c) $\frac{3}{43}(9,14,-2)^T$.
4. (a) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
5. (a) $(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T, \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)^T, \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^T)$,
   (b) $(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T, \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)^T, \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,-1)^T)$.
6. (a) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$
   (c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$
7. Například $(\frac{1}{\sqrt{5}}(2,0,1,0)^T, \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,1)^T, \frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,-2,0)^T$.
8. $(2,3,3,-2)^T$.
9. ON báze $(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0)^T, \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,2,0)^T, (0,1,1)^T$,
10. $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3 Vlastní čísla a vlastní vektory 1: výpočet a diagonalizace

Základní úlohy

3.1. Je-li ψ ortogonální projekce reálného vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem na rovinu $\langle (1,1,-2)^T, (2,0,1)^T \rangle$, najděte všechna vlastní čísla a všechny vlastní vektory ψ a najděte bázi B, aby matice $[\psi]_B$ byla diagonální.

3.2. Určete vlastní čísla (i s algebraickými násobnostmi) a vlastní vektory lineárního operátoru f na reálném vektorovém $\mathbb{R}^3$ a rozhodněte, zda je diagonalizovatelný, jestliže

$$(a) f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_3 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}, (b) f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 - x_3 \\ 2x_2 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}, (c) f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 - x_3 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

3.3. Určete koeficienty u λ^4, λ^3 a konstantní koeficient charakteristického polynomu reálné matice A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

3.4. Najděte všechna vlastní čísla a všechny vlastní vektory reálné matice $\mathbf{A}$ a rozhodněte, zda je diagonalizovatelná, jestliže $\mathbf{A} =$

$$(a) \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, (b) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad (c) \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad (d) \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad (e) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3.5. Pro diagonalizovatelné matice $\mathbf{A}$ z předchozí úlohy najděte regulární matici $\mathbf{R}$ a diagonální matici $\mathbf{D}$, aby $\mathbf{D} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{R}$.

3.6. Mějme matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$.

(a) Najděte (nad $\mathbb{Z}_5$) všechna vlastní čísla a všechny vlastní vektory matice $\mathbf{A}$,

(b) dokažte, že je matice $\mathbf{A}$ diagonalizovatelná a najděte regulární matici $\mathbf{P}$ nad $\mathbb{Z}_5$, pro niž je $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ diagonální.

(c) Spočítejte $\mathbf{A}^{100}$

3.7. Matice lineárního operátoru na $\mathbb{Z}_3^3$ vhledem k bázi B je $\mathbf{A}$. Určete vlastní čísla (i s algebraickými násobnostmi) a příslušné vlastní vektory operátoru f, jestliže

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

3.8. Najděte vzorec pro a_n v následující posloupnosti reálných čísel.

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \quad a_n = 6a_{n-1} - 5a_{n-2} \text{ pro } n \geq 2.$$

3.9. Vyřešte pro počáteční podmínky $u_1(0) = 2$ a $u_2(0) = 3$ soustavu diferenciálních rovnic, kde neznámé jsou reálné funkce reálné proměnné:

$$u_1' = u_1 + u_2$$
$$u_2' = -2u_1 + 4u_2$$

Doplňující úlohy:

3.10. Operátor f na $\mathbb{Z}_7^2$ splňuje $f((2,1)^T) = (0,5)^T, \quad f((1,1)^T) = (6,2)^T$. Určete jeho charakteristický polynom a vlastní čísla.

3.11. Matice lineárního operátoru f na prostoru $\mathbb{Z}_5^2$ vzhledem k bázi $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ je $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$. Zjistěte, zda je f diagonalizovatelný. Pokud ano, najděte bázi C takovou, že $[f]_C^C$ je diagonální, a určete $[f]_C^C$. Kolik bází C, pro něž je $[f]_C^C$ diagonální existuje?

3.12. Vyřešte diferenční rovnici (diskrétní lineární dynamický systém) $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ s počátečním vektorem $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3.13. Je-li φ (bijektivní) lineární operátor na reálném prostoru $\mathbb{R}^3$ s maticí $[f]_{K_2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ vzhledem ke kanonické bázi K_2, najděte všechna vlastní čísla a všechny vlastní vektory lineárních operátorů f^{-1} a f^3 a existují-li, najděte báze B_{-1} a B_3, vůči nimž mají lineární operátory f^{-1} a f^3 diagonální matici.

Řešení:

1. vlastní čísla: 1 a 0, vlastní vektory: $\langle (1,1,-2)^T, (2,0,1)^T \rangle \cup \langle (-1,5,2)^T \rangle$
2. (a) vlastní čísla": $0,1,2$ (všechna alg.násobnosti 1) , vlastní vektory: $\langle (1,1,1)^T \rangle \cup \langle (1,2,1)^T \rangle \cup \langle (1,1,-1)^T \rangle$
   (b) vlastní čísla: 1 (alg.nás. 2) a 2 (alg.nás. 1), vlastní vektory: $\langle (1,0,0)^T, (0,-1,1)^T \rangle \cup \langle (-1,1,0)^T \rangle$
   (c) vlastní číslo: 1 (alg.násobnosti 3), vlastní vektory: $\langle (1,0,0)^T \rangle$.
   (a), (b) jsou diagonalizovatelné, (c) není.
3. $1 \cdot \lambda^4$, $-3 \cdot \lambda^3$, $-24 \cdot \lambda^0$.
4. (a) vlastní čísla: $3,4$, vlastní vektory: $\langle (-1,5)^T \rangle \cup \langle (0,1)^T \rangle$, diagonalizovatelná,
   (b) vlastní čísla: $1,2$, vlastní vektory: $\langle (1,1)^T \rangle \cup \langle (1,2)^T \rangle$, diagonalizovatelná,
   (c) vlastní čísla: $2,7$, vlastní vektory: $\langle (-2,1)^T \rangle \cup \langle (1,2)^T \rangle$, diagonalizovatelná,
   (d) vlastní číslo: 2, vlastní vektory: $\langle (1,1)^T \rangle$, není diagonalizovatelná,
   (e) vlastní čísla: $1,4$, vlastní vektory: $\langle (1,-1,0)^T, (1,1,-2)^T \rangle \cup \langle (1,1,1)^T \rangle$, diagonalizovatelná.
5. (a) $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, (b) $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, (c) $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$,
   (e) $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.
6. (a) vlastní čísla: $1,2$, vlastní vektory: $\langle (1,0,1)^T, (0,1,0)^T \rangle \cup \langle (1,3,4)^T \rangle$,
   (b) $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, (c) $\mathbf{A}^{100} = \mathbf{I}_3$
7. vlastní číslo: 0 (alg.násobnosti 1), vlastní vektory: $\langle (2,1,0)^T \rangle$.
8. $a_n = \frac{3+5^n}{4}$.
9. $u_1 = e^{2t} + e^{3t}$, $u_2 = e^{2t} + 2e^{3t}$
10. $\lambda^2 + 5 = (\lambda - 3)(\lambda - 4)$, vlastní čísla: $3,4$.
11. například pro $C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ je $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, různých bází C je 32.
12. $\mathbf{x}_k = 3^n \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
13. vlastní čísla f^{-1} jsou $1, \frac{1}{4}$, vlastní čísla f^3 jsou $1, 64$, vlastní vektory obou jsou právě $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle \cup \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.

4 Vlastní čísla a vlastní vektory 2: Jordanův kanonický tvar

Základní úlohy

4.1. Vypočítejte A^{10} pro reálnou matici $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

4.2. Buď $\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ matice nad tělesem reálných čísel.

(a) Najděte Jordanův kanonický tvar matic $\mathbf{A}_i$ a rozhodněte, které dvojice matic jsou si podobné.

(b) najděte regulární matice $\mathbf{P}_i$, aby $\mathbf{P}_i^{-1}\mathbf{A}_i\mathbf{P}_i$ byly Jordanovy matice,

(c) pro dvojice podobných matic najděte regulární matici $\mathbf{S}_{ij}$, aby $\mathbf{S}_{ij}^{-1}\mathbf{A}_i\mathbf{S}_{ij} = \mathbf{A}_j$.

4.3. Uvažujme nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ matice $\mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Existuje-li, najděte Jordanův kanonický tvar matic $\mathbf{D}_i$ pro $i = 1, 2, 3$a regulární matice $\mathbf{P}_i$, aby $\mathbf{P}_i^{-1}\mathbf{D}_i\mathbf{P}_i$ pro $i = 1, 2, 3$ byly Jordanovy, Kolik existuje takových matic $\mathbf{P}_1$?

4.4. Uvažujme matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ nad tělesem racionálních čísel. Existuje-li, najděte jejich Jordanův kanonický tvar matic $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ a rozhodněte, zda jsou si podobné.

4.5. Mějme lineární operátor φ na $\mathbb{C}^3$ s maticí $[\varphi]_{K_3} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ vzhledem ke kanonické bázi K_3.

(a) Najděte bázi B, vůči níž bude mít φ Jordanovu matici,

(b) spočítejte $[\varphi^{45}]_B$ pro bázi B z (a),

(c) položíme-li $\mathbf{A} = \frac{1}{3}[\varphi]_{K_3}$, spočítejte mocninu $\mathbf{A}^{45}$.

4.6. Mějme komplexní matice $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Najděte Jordanův kanonický tvar matic $\mathbf{G}$ a $\mathbf{H}$,

(b) spočítejte $\mathbf{G}^{50}$,

(c) existuje-li, najděte ¨nejmenší přirozené n, pro které $\mathbf{H}^n = \mathbf{0}$.

4.7. Vyřešte diferenční rovnici $\mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1})$ pro počáteční vektor $\mathbf{x}_0 = (2, 1)^T$, kde operátor $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je dán vztahem

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ -2x + 5y \end{pmatrix}$$

4.8. Najděte vzorec pro n-tý člen reálné posloupnosti a_n.

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 2, \quad a_{n+3} = 5a_{n+2} - 8a_{n+1} + 4a_n$$

4.9. O reálné matici A řádu 13 víme, že má charakteristický polynom $p(x) = (2-x)^9(3-x)^4$, $\dim(\mathrm{Ker}\,(A - 3I_{13})) = 1$, $\dim(\mathrm{Ker}\,(A-2I_{13})) = 4$, $\dim(\mathrm{Ker}\,((A-2I_{13})^2)) = 7$, $\dim(\mathrm{Ker}\,((A-2I_{13})^3)) = 9$. Určete matici J v Jordanově kanonickém tvaru podobnou matici A.

4.10. Je-li ψ lineární operátor na reálném prostoru $\mathbb{R}^3$ daný předpisem $\psi((x,y,z)^T) = (x+2y+z, 2x-y+2z, -2y)^T$, ověřte, že je podprostor $U = \langle (3,1,-2)^T, (-2,1,2)^T \rangle$ jeho invariantním podprostorem. Označme ϕ lineární operátor na U, který vznikne zúžením ψ na U (tedy $\phi(\mathbf{u}) = \psi(\mathbf{u})$). Najděte matice:

(a) $[\phi]_B$ a $[\phi^2]_B$ pro bázi $B = ((3,1,-2)^T, (-2,1,2)^T)$,

(b) $[\phi]_C$ a $[\phi^2]_C$ pro bázi $C = ((1,2,0)^T, (-2,1,2)^T)$.

Doplňující úlohy:

4.11. Matice operátoru f na $\mathbb{R}^2$ vzhledem k bázi B je A. Najděte bázi C, aby $[f]_C^C$ byla v Jordanově kanonickém tvaru.

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right), \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

4.12. Najděte bázi prostoru $\mathbb{R}^3$ složenou z Jordanových řetízků operátoru f_A a matici f_A vzhledem k této bázi.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

4.13. Najděte bázi B prostoru $\mathbb{Z}_7^4$, pro kterou je $[f_A]_B^B$ v Jordanově kanonickém tvaru a určete $[f_A]_B^B$, jestliže

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 6 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4.14. Uvažujme lineární operátor f na reálném vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ s maticí $[f]_{K_3}^{K_3} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ vzhledem ke kanonické bázi K_3. Najděte všechny invariantní podprostory lineárního operátoru f.

4.15. Najděte všechny invariantní podprostory matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$. Kolik jich celkem je?

Řešení:

1. $A^{10} = \begin{pmatrix} 2^{10} & 10 \cdot 2^9 & 45 \cdot 2^8 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{10} & 10 \cdot 2^9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^{10} & 10 \cdot 3^9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3^{10} \end{pmatrix}$

2. (a) $\mathbf{A}_1 \sim \mathbf{A}_2 \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \not\sim A_3 \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

   (b) $\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{P}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

   (c) $\mathbf{S} = \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

3. $\mathbf{D}_1 \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D}_2 \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D}_3 \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{P}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

existuje právě $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$ různých matic $\mathbf{P}_1$.

4. $\mathbf{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \not\sim \mathbf{B} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. (a) $B = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$, (b) $\begin{pmatrix} 3^{45} & 45 \cdot 3^{44} & 990 \cdot 3^{43} \\ 0 & 3^{45} & 45 \cdot 3^{44} \\ 0 & 0 & 3^{45} \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} -234 & -30 & -235 \\ 15 & 1 & 15 \\ 235 & 30 & 236 \end{pmatrix}$

6. (a) $\mathbf{G} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{H} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 3576 & -3725 & 3575 \\ -50 & 51 & -50 \\ -3625 & 3775 & 3624 \end{pmatrix}$, (c) $n = 3$.

7. $\mathbf{x}_k = 3^{k-1} \begin{pmatrix} 6 - 2k \\ 3 - 2k \end{pmatrix}$.

8. $a_{n+3} = 2^{n+3}(2n+1) + 6$.

9. $$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

10. (a) $[\phi]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $[\phi^2]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, (b) $[\phi]_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $[\phi^2]_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

11. $B = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$

12. $B = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, $[f_A] = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

13. $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$, $[f_A] = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

14. $\{\mathbf{0}\}$, $\langle (0,0,1)^T \rangle$, $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$, $\mathbb{R}^3$.

15. $\{\mathbf{0}\}$, $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle$, $\langle \mathbf{v} \rangle$, $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{v} \rangle$ pro $\mathbf{v} \in \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$, $\mathbb{Z}_5^3$, celkem 16 podprostorů.

5 Ortogonální diagonalizovatelnost

Základní úlohy

5.1. Zjistěte, zda je komplexní matice A normální.

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & i \\ 1-2i & 3-i \end{pmatrix}$$

5.2. Najděte ortonormální bázi B prostoru $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem, vzhledem ke které je matice operátoru f diagonální a najděte $[f]_B^B$.

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y+2z \\ x+2y+2z \\ 2x+2y+5z \end{pmatrix}$$

5.3. Najděte ortogonální matici $\mathbf{Q}$ a takovou diagonální matici $\mathbf{D}$, že $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T$, jestliže

$$\text{(a)}\quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)}\quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

5.4. Najděte singulární rozklad reálné matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5.5. Zjistěte, zda je reálná matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ pozitivně (semi)definitní.

Doplňující úlohy:

5.6. Jestliže $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1-i & -1 \\ 1+i & 2 & -1-i \\ -1 & -1+i & 1 \end{pmatrix}$, najděte komplexní unitární matici $\mathbf{U}$, pro níž je $\mathbf{D} = \overline{\mathbf{U}}^T \mathbf{A}\mathbf{U}$ diagonální a spočítejte $\mathbf{D}$.

Řešení:

1. $A^*A \neq AA^*$, proto A není normální.
2. $B = (\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T, \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)^T, \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2))^T$ a $[f]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.
3. (a) $\mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$, (b) $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.
5. $\mathbf{A}$ je pozitivně semidefinitní a není pozitivně definitní.
6. $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1+i}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} + \frac{i}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1-i}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

6 Bilineární formy

Základní úlohy

6.1. Najděte matici bilineární formy f na $\mathbb{Z}_5^2$ vzhledem k bázi $B = (\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix})$ znáte-li její analytické vyjádření vzhledem ke kanonické bázi $f(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 4x_2y_1 + 3x_2y_2$

6.2. Najděte matici bilineární formy g na $\mathbb{Q}^3$ vzhledem k bázi D znáte-li její matici vzhledem k bázi C, jestliže

$$C = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right), \quad D = \left((\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix})\right), \quad [g]_C = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\0 & -1 & 1\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

6.3. Nechť f, g jsou formy a B a C báze z úloh 6.1 a 6.2 a uvažujme symetrické bilineární formy f_s a g_s a antisymetrické bilineární formy f_a a g_a splňující pro které $f = f_s + f_a$, $g = g_s + g_a$. Najděte matice $[f_s]_B$, $[f_a]_B$, $[g_s]_C$, $[g_a]_C$.

6.4. Je-li g bilineární forma daná analytickým vyjádřením

$$g((x_1, x_2, x_3)^T, (y_1, y_2, y_3)^T) = x_1y_1 + 3x_1y_2 - x_1y_3 + x_3y_1 + 2x_2y_2 - 2x_3y_2$$

vzhledem ke kanonické bázi na racionálním vektorovém prostoru $\mathbf{Q}^3$, určete analytické vyjádření symetrické g_s a antisymetrické g_a části g vzhledem ke kanonické bázi.

6.5. Najděte pro symetrickou bilineární formu f na vektorovém prostoru V nějakou f-ortogonální bázi a matici f vzhledem k této bázi, jestliže

(a) $V = \mathbf{Q}^2$, $[f]_{K_2} = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$, kde K_2 je kanonická báze,

(b) $V = \mathbb{Z}_5^2$ s analytickým vyjádřením $f(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}) = 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_2$ vzhledem ke kanonické bázi,

(c) $V = \mathbb{Z}_5^2$, $[f]_B = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 3\end{pmatrix}$ kde $B = ((1, 2), (2, 3))$,

(d) $V = \mathbb{R}^3$ s analytickým vyjádřením $f_2((x_1, x_2, x_3)^T) = 2x_1x_2 - 2x_2x_3$ vzhledem ke kanonické bázi,

(e) $V = \mathbb{Z}_7^3$ s analytickým vyjádřením $f_2((x_1, x_2, x_3)^T) = x_1^2 + 5x_1x_2 + 3x_2^2 + 4x_2x_3 + 2x_3^2$ vzhledem k bázi $B = ((1, 0, 2)^T, (1, 0, 1)^T, (0, 3, 1)^T)$.

6.6. Určete signaturu bilineární formy f, znáte-li matici $[f]_{K_3} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\1 & 3 & 3\\3 & 3 & 5\end{pmatrix}$.

6.7. Určete signaturu reálné kvadratické formy $f_2((x_1, x_2, x_3)^T) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2^2 + 5x_3^2$.

6.8. Najděte bázi $\mathbb{R}^3$, která je f-ortogonální a zároveň ortonormální vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu pro $f_2((x_1, x_2, x_3)^T) = 5(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$.

6.9. Analyzujte následující útvar v $\mathbb{R}^2$: $U = \{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 + 2x_1 + x_2 - 5 = 0\}$.

Doplňující úlohy:

6.10. Pro kvadratickou formu $g_2 = x_1^2 - 6x_1x_2 + 2x_2^2$ najděte nenulový vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, pro který

(a) $g_2(\mathbf{v}) > 0$,

(b) $g_2(\mathbf{v}) < 0$,

(c) $g_2(\mathbf{v}) = 0$,

6.11. Nechť h je symetrická bilineární forma na reálném vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ s maticí $[h]_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ vzhledem k nějaké bázi B. Rozhodněte, zda je h skalární součin na $\mathbb{R}^3$.

6.12. Rozložte matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ na součin LDL^T, kde L je dolní trojúhelníková s jedničkami na diagonále a D je diagonální.

Řešení:

1. $[f]_B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
2. $[g]_D = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -9 & -4 \\ 6 & 5 & 4 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$
3. $[f_s]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $[f_a]_B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   $[g_s]_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$, $[g_a]_C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.
4. $g_s((x_1,x_2,x_3)^T,(y_1,y_2,y_3)^T) = x_1y_1 + \frac{3}{2}x_1y_2 + \frac{3}{2}x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2$,
   $g_a((x_1,x_2,x_3)^T,(y_1,y_2,y_3)^T) = \frac{3}{2}x_1y_2 - \frac{3}{2}x_2y_1 - x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 - x_3y_2$.
5. (a) $P = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix})$, $[f]_P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$,

   (b) $P = (\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix})$, $[f]_P = \mathbf{I}_2$

   (c) $P = (\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix})$, $[f]_P = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

   (d) $P = ((1,1,0)^T, (-1,1,0)^T, (2,0,2)^T)$, $[f]_P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

   (e) $P = ((1,0,2)^T, (2,0,3)^T, (5,3,5)^T)$, $[f]_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
6. $(0,2,1)$
7. $(0,3,0)$
8. $B = (\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix})$
9. Pro $B = (\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix})$ je $[U]_B = \{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mid \frac{24}{25}y_1^2 + \frac{4}{25}(y_2 + \frac{\sqrt{5}}{2})^2 = 1\}$, tedy jde tedy o elipsu se středem $\begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ a s délkami poloos $\frac{5}{2\sqrt{6}}$ a $\frac{5}{2}$ ve směru vektorů báze B
10. Například (a) $g_2(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = 1$, (b) $g_2(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}) = -7$, (c) $g_2(\begin{pmatrix} \sqrt{7}+3 \\ 1 \end{pmatrix}) = -7$.
11. Ano, h je skalární součin.
12. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7 Afinní prostory

Základní úlohy

7.1. Nechť $S = \left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \right)$ a $R = \left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}. \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} \right)$. Ověřte, že se jedná o souřadné soustavy afinního prostoru $\mathbb{Z}_5^2$ a

(a) spočítejte souřadnice bodu $b = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ vzhledem k soustavě souřadnic S,

(b) najděte bod c, pro který $[c]_S = \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ vzhledem k soustavě souřadnic S,

(c) pro bod a afinního prostoru najděte $[a]_S$, jestliže $[a]_R = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

7.2. Uvažujme posloupnost bodů $B = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \right)$ afinního prostoru s body i vektory $A = V = \mathbf{Q}^3$. Ověřte, že je B barycentrická soustava souřadnic afinního prostoru A a

(a) spočítejte barycentrické souřadnice bodu $b = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ vzhledem k soustavě B,

(b) najděte bod c s barycentrickými souřadnicemi $(\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3})^T$ vzhledem k soustavě B,

(c) spočítejte barycentrické souřadnice bodu $b = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ vzhledem k soustavě $B' = \left(\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right)$.

7.3. V afinním prostoru s body i vektory $A = V = \mathbb{Z}_5^4$ uvažujme podprostory

$$D_1 = \langle \begin{pmatrix}2\\3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\2\\4\end{pmatrix} \rangle, \quad D_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix} \rangle,$$

$$D_3 = \{a \in A | \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\3 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \cdot a = \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}\}.$$

(a) Najděte soustavu souřadnic S_i a barycentrickou soustava souřadnic B_i afinních prostorů D_i,

(b) určete parametrické vyjádření podprostorů D_1 a D_3,

(c) určete rovnicové vyjádření podprostorů D_1 a D_2,

(d) spočítejte průnik a vzájemnou polohu podprostorů D_i a D_j pro $i \neq j$.

7.4. Spočítejte vzdálenost přímek $P = (1, 0, 2, 1, 1)^T + \langle (1, 1, 1, 1, -1)^T \rangle$ a $Q = (2, 1, 1, 1, 0)^T + \langle (1, 1, 1, 1, -1)^T \rangle$ v afinním eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^5$ se standardním skalárním součinem.

7.5. Určete obraz bodu $(3, 1, -2)^T \in \mathbb{R}^3$ při afinním zobrazení $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ splňujícím

$$F\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, F\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}, F\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, F\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

a obraz vektoru $(3, 1, -2)^T$ při příslušném lineárním zobrazení f.

7.6. Lineární operátor $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vytvořený afinním zobrazením F má vzhledem k bázi B matici A. Navíc $F((1,2)^T) = (5,-8)^T$. Určete $F((3,4)^T)$.

$$B = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right), A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Doplňující úlohy:

7.7. afinním eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^5$ se standardním skalárním součinem $\mathbb{R}^3$ uvažujme přímky $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ a $Q = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.

(a) Určete vzájemnou polohu přímek P a Q,

(b) najděte přímku různoběžnou a zároveň kolmou na obě přímky P a Q,

(c) spočítejte vzdálenost P a Q.

Řešení:

1. (a) $[b]_S = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, (b) $c = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, (c) $[a]_S = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2. (a) $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, (b) $\frac{1}{12} \begin{pmatrix} 17 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

3. (a) například $S_1 = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$, $B_1 = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$,

   $S_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, $B_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$, $S_3 = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$, $B_3 = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

   (b) $D_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$, $D_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$.

   (c) Řešení soustavy $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$ je D_1 a řešení soustavy $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ je D_2

   (d) $D_1 \cap D_3 = \{(1,3,0,4)^T\}$, $D_1 \cap D_2 = D_2 \cap D_3 = \emptyset$, D_1 a D_2 jsou rovnoběžné, D_1 a D_2 jsou různoběžné, D_2 a D_3 jsou mimoběžné.

4. $\frac{4}{\sqrt{5}}$

5. $(0,8)^T$, $(3,-10)^T$

6. $F((3,4)^T) = (5,-8)^T + (-12,16)^T = (-7,8)^T$

7. (a) P a Q jsou mimoběžné, (b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \rangle$, (c) $dist(P,Q) = \sqrt{11}$.