# NMAG 111 Lineární algebra 1, zimní semestr
# MFF UK
# 1. písemná práce – verze B
# 24. 11. 2021
# Doba řešení: 90 minut

**Přednášející: L. Barto**

**Křestní jméno:** ________________________ **Příjmení:** ____________________________

**Cvičící:** ____________________________

**Instrukce**

– **Neotvírejte dříve, než jste k tomu vyzváni dozorem!**

– Test je vytištěn oboustranně. Obsahuje 7 úloh na stranách 2 až 8, strany 9 až 10 jsou volné na pomocné výpočty apod.
– Jste odpovědný/á za to, že Vaše kopie zkoušky je úplná.
– Všechny odpovědi musí být řádně zdůvodněné, není-li řečeno jinak.
– Žádné elektronické pomůcky včetně kalkulačky nejsou dovoleny.

| Příklad | Body |
|---|---|
| **1** [6] | |
| **2** [6] | |
| **3** [6] | |
| **4** [6] | |
| **5** [8] | |
| **6** [8] | |
| **7** [10] | |
| **Celkem** [50] | |

**(1)** [6 bodů] Zakroužkujte správnou odpověď, nezdůvodňujte. K získání bodů je potřeba vždy odpovědět správně všechny tři otázky. ANO = za daných předpokladů vždy pravda, NE = jinak

(a) Uvažme rovnici $\gamma x + (\gamma^2 + \gamma)y = 0$ nad $\mathbb{Z}_5$, kde $x, y$ jsou proměnné a $\gamma \in \mathbb{Z}_5$ je parametr. Potom:

**ANO NE** Pro každé $\gamma \in \mathbb{Z}_5$ má tato rovnice právě jedno řešení $(x, y)$.

**ANO NE** Pro všechny hodnoty $\gamma \in \mathbb{Z}_5$ existuje aspoň jedno řešení $(x, y)$ této rovnice.

**ANO NE** Když $\gamma x + (\gamma^2 + \gamma)y = 0$ budeme chápat jako soustavu lineárních rovnic, tak pro každé $\gamma \in \mathbb{Z}_5$ jde o homogenní soustavu lineárních rovnic.

(b) Nechť $A$ je matice typu $9 \times 16$ nad $\mathbb{R}$ hodnosti 9. Potom:

**ANO NE** Matice $A$ je regulární.

**ANO NE** K matici $A$ existuje matice inverzní zprava.

**ANO NE** K matici $A$ existuje matice inverzní zleva.

(c) Je-li $C = AB$, kde $A, B$ jsou čtvercové matice řádu 3 nad $\mathbb{R}$, pak platí:

**ANO NE** Řádky matice $C$ jsou lineárními kombinacemi řádků matice $A$.

**ANO NE** Sloupce matice $C$ jsou lineárními kombinacemi sloupců matice $B$.

**ANO NE** Řádky matice $C$ jsou lineárními kombinacemi sloupců matice $B$.

**(2)** [6 bodů] Uveďte definici následujících pojmů. Pište pečlivě, celými větami, nikoliv schematicky.

(a) Součin matic

(b) Aritmetický vektor nad $\mathbb{R}$

(c) Nulový prvek v tělese

**(3)** [6 bodů] V této úloze nemusíte zdůvodňovat řešení. K plnému počtu bodů stačí správný výsledek.

(a) Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic v proměnných $x_1, x_2, x_3, x_4$ nad tělesem $\mathbb{Z}_2$:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

(b) Najděte nějakou hodnotu parametrů $a, b \in \mathbb{R}$ takovou, aby reálná soustava lineárních rovnic s rozšířenou maticí

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -3 & 6 & 0 & a \\ 1 & -1 & 2 & 0 & b \end{array}\right)$$

*neměla* řešení.

(c) Zakroužkujte všechny matice v odstupňovaném tvaru (a žádné jiné nekroužkujte; vše je nad $\mathbb{R}$).

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -11 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 11 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

**(4)** [6 bodů] V této úloze je třeba předvést podrobný výpočet se stručným komentářem zdůvodňujícím správnost postupu.

Najděte nad $\mathbb{R}$ nějakou matici inverzní zprava k matici $A$, nebo dokažte, že taková matice neexistuje.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**(5)** [8 bodů] Tvrzení vždy pouze pečlivě zformulujte, nedokazujte. Nezapomeňte uvést všechny předpoklady a vysvětlit, co označují všechna písmena, která užíváte.

(a) Formulujte tvrzení o tom, jak vypadá matice transponovaná k součinu dvou matic.

(b) Formulujte jako tvrzení nutnou a postačující podmínku na to, aby kladné celé číslo $k$ bylo charakteristikou nějakého tělesa.

**(6)** [8 bodů] V této úloze máte dokázat jednodušší tvrzení ze skript, v reformulované nebo méně obecné podobě. V důkazu se neopírejte o obecnější formulaci téhož tvrzení ani o silnější tvrzení. Pokud kromě definic použijete ještě nějaké jiné tvrzení, měla by jeho formulace být součástí důkazu.

(a) Dokažte následující tvrzení. Nechť $h\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^9$ je zobrazení určené nějakou maticí. Buďte $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^4$ a $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^9$ vektory takové, že $h(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ a $h(\mathbf{u}) = \mathbf{o}$. Pak je vektor $2(\mathbf{u} + \mathbf{v})$ vzorem vektoru $2\mathbf{w}$ při zobrazení $h$.

(b) Dokažte následující tvrzení. Nechť $A$ je matice typu $2 \times 2$ nad $\mathbb{Z}_7$ taková, že lze elementárními řádkovými úpravami převést na $I_2$. Pak existuje matice $B$ typu $2 \times 2$ nad $\mathbb{Z}_7$ taková, že $BA$ je rovná $I_2$.

**(7)** [10 bodů] Odpovědi v následujících úlohách zdůvodněte (tj. dokažte).

(a) Existuje homogenní soustava lineárních rovnic nad tělesem $\mathbb{Z}_7$, která má
   (i) právě 14 řešení?
   (ii) právě 49 řešení?

(b) Najděte všechny čtvercové matice $A$ řádu 2 nad $\mathbb{R}$, které jsou horní trojúhelníkové a splňují $AA^T = I_2$. (Součástí úlohy je i důkaz, že žádné jiné než Vámi nalezené matice zadání nesplňují.)

**Konec**