Domácí úkol č. 9 k přednášce NMAG 101: Lineární algebra a geometrie 1, zimní semestr 2013–2014

Datum odevzdání 11.12.2013 16:00

(9.1) Bez počítání determinantu najděte (přímo z definice) koeficienty u x^4 a x^3 v determinantu reálné matice

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & x & 2x \\ 3x & 3 & -x & 2 \\ 4 & \pi & x & 5 \\ e & x & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

(9.2) Permutace $\alpha, \beta \in S_9$ jsou dány redukovaným cyklickým zápisem.

$$\alpha = (2\ 6\ 1\ 7)(3\ 8\ 4), \quad \beta = (5\ 1\ 2\ 9)(3\ 6\ 7)$$

(a) Dokažte, že pro libovolnou permutaci $\pi \in S_9$ je redukovaný cyklický zápis permutace $\pi\alpha\pi^{-1}$ tvaru $(x_1\ x_2\ x_3\ x_4)(x_5\ x_6\ x_7)$. (Nápověda: kam se zobrazí $\pi(1)$?)

(b) Určete počet permutací $\pi \in S_9$, pro které platí $\pi\alpha\pi^{-1} = \beta$.

Poznámka: Po vyřešení bodu (a) vás asi napadne, že permutace $\pi\alpha\pi^{-1}$ a α mají obecně vždy stejný „cyklický typ“ – v zápisu pomocí nezávislých cyklů mají stejný počet cyklů každé délky. Permutace $\pi\alpha\pi^{-1}$ se nazývá konjugovaná permutace k permutaci α. Konjugování lze využít například na vyřešení Rubikovy kostky: Označme α permutaci odpovídající pootočení horní stěny o 90 stupňů a π permutaci, která prohazuje dva sousední hranové kostičky v horní stěně a všechny ostatní kostičky v horní stěně nechává na místě (ostatní kostičky můžeme promíchat libovolně). Takový tah π asi umí nalézt téměř každý, kdo si nějakou dobu s Rubikovou kostkou hrál. Po vyřešení části (a) by neměl být problém si rozmyslet, co udělá tah $\pi\alpha\pi^{-1}$, a pak tah $\alpha^{-1}\pi\alpha\pi^{-1}$. Zjistíte, že druhý tah cyklicky rotuje tři hranové kostičky a všechny ostatní kostičky nechává na místě. Těmito tahy lze přesunout všechny hranové kostičky na správné místo. Podobným trikem lze vymyslet tahy, které umožní přesunout rohové kostičky na správné místo, a také opravit orientaci rohových a hranových kostiček.

Bonusový problém: Označme A_n množinu všech sudých permutací v S_n, kde $n \geq 5$. Množina $M \subseteq A_n$ splňuje následující:

- M obsahuje nějakou neidentickou permutaci.
- M je uzavřená na skládání: $(\forall \pi, \rho \in M)\ \pi\rho \in M$.
- M je uzavřená na konjugování libovolnou sudou permutací: $(\forall \pi \in M)(\forall \rho \in A_n)\ \rho^{-1}\pi\rho \in M$.

Dokažte, že nutně $M = A_n$ a že toto není pravda pro $n = 4$.