Domácí úkol č. 9 k přednášce NMAG 102: Lineární algebra a geometrie 2, letní semestr 2015–2016

V příkladech používáme *spektrální normu*, která je pro komplexní matici A typu $m \times n$ definovaná vztahem

$$\|A\| = \max\{\|A\mathbf{x}\| : \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n, \|\mathbf{x}\| = 1\} \ ,$$

kde normy na pravé straně jsou vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu.

(9.1) Dokažte, že pro libovolné komplexní matice A, B, C vhodných typů platí $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$, $\|BC\| \leq \|B\| \, \|C\|$.

(9.2) V závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$ najděte reálnou matici B hodnosti nejvýše 1 takovou, že $\|A - B\|$ je co nejmenší, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \ .$$

Určete také $\|A - B\|$.

Nápověda: Pro pohodlnější počítání je dobré si všimnout, že A je symetrická, takže singulární rozklad je možné spočítat efektivnějším postupem než pro obecnou matici.

Bonusový problém: Frobeniova norma matice A typu $m \times n$ je definována vzorcem

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2} \ .$$

Dokažte, že platí

$$\|A\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_r^2} \ ,$$

kde $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ je seznam singulárních hodnot matice A, každé tolikrát kolik je jeho násobnost.