

Domácí úkol č. 7 k přednášce NMAG 102: Lineární algebra a geometrie 2, letní semestr 2016–2017

(7.1) Matice lineárního operátoru f na \mathbb{R}^8 vzhledem k bázi $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_8)$ je matice v Jordanově tvaru s dvěma buňkami příslušnými vlastnímu číslu 0 řádů 3 a 5. Pro každé $i, j \in \mathbb{N}$ určete dimenzi a najděte nějakou bázi prostoru $(\text{Ker } f^i) \cap (\text{Im } f^j)$.

(7.2) Označme \mathbf{V} vektorový prostor všech reálných polynomů stupně nejvýše 2 s běžnými operacemi. Lineární operátor ϕ na \mathbf{V} je definovaný vztahem $\phi(p) = p' - x^2 p''$ (p' značí derivaci, p'' druhou derivaci). Najděte matici J v Jordanově tvaru a bázi B prostoru \mathbf{V} tak, aby $[\phi]_B^B = J$.

Nápověda: Začněte tím, že najdete matici operátoru ϕ vzhledem k nějaké bázi prostoru \mathbf{V} .

Poznámka: Není třeba ověřovat, že ϕ je skutečně lineární operátor.

Bonusový problém: Čtvercová matice $A = (a_{ij})$ řádu n je *divná*, pokud $a_{i+1,i} = 1$ pro $i \in \{1, \dots, n-1\}$ a $a_{i,j} = 0$ pro $j \in \{1, \dots, n-1\}$, $i \neq j+1$ (tedy poslední sloupec je libovolný, bod diagonálou jsou jedničky a jinde nuly). Ukažte, že každá čtvercová matice nad libovolným tělesem je podobná blokově diagonální matici, jejíž bloky jsou divné. Najděte, jak se divné matice ve skutečnosti nazývají.