Domácí úkol č. 7 k přednášce NMAG 102: Lineární algebra a geometrie 2, letní semestr 2013–2014

Datum odevzdání 16.4.2014 15:30

(7.1) Dokažte, že čtvercová horní trojúhelníková komplexní matice A je normální právě tehdy, když je diagonální.

Nápověda: Pro důkaz těžší implikace můžete postupovat indukcí podle velikosti. Spočítejte prvek na místě $(1,1)$ v součinech AA^*, A^*A a porovnáním nahlédněte, že první řádek matice A je nulový (kromě prvku $(1,1)$). Důkaz dokončíte použitím indukčního předpokladu na vhodnou podmatici.

(7.2) Dokažte, že pro libovolná reálná čísla $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí

$$2a^2 + 4b^2 + 3c^2 + 4ac + 4bc \geq 0 \ .$$

Nápověda: Napište si výraz ve tvaru $(a,b,c)A(a,b,c)^T$, kde A je reálná symetrická matice typu 3×3 (pozor na prvky mimo diagonálu, nejsou to přímo příslušné koeficienty), a pomocí kriteria z přednášky ukažte, že A je pozitivně semidefinitní.

Bonusový problém: Dokažte, že operátor f na komplexním vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ je normální právě tehdy, když pro každý vektor $\mathbf{x} \in V$ platí $\|f(\mathbf{x})\| = \|f^*(\mathbf{x})\|$.