Domácí úkol č. 6 k přednášce NMAG 102: Lineární algebra a geometrie 2, letní semestr 2015–2016

(6.1) Uvažujme diskrétní dynamický systém $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$, kde $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^3$ a A je reálná čtvercová matice řádu 3. O matici A máme následující informace:

- A je singulární.
- Součet prvků v každém sloupci matice A je 1.
- Součet prvků na diagonále matice A je 0.

Konverguje pak posloupnost $(\mathbf{x}_k)_{k=0}^{\infty}$ pro jakýkoliv počáteční vektor $\mathbf{x}_0$? Konverguje tato posloupnost pro nějaký nenulový počáteční vektor k nulovému vektoru? Konverguje tato posloupnost pro nějaký nenulový počáteční vektor k nenulovému vektoru? (S konvergencí stačí pracovat neformálně.)

Nápověda: Podívejte se na to, co říkají podmínky o charakteristickém polynomu matice A, přičemž použijte výsledek domácího úkolu 4.1. Pak můžete spočítat vlastní čísla a rozmyslet si, co říkají o řešení zadaného dynamického systému.

(6.2) Lineární operátor f na prostoru $\mathbf{V} = \left\langle (1,1,0)^T, (2,-1,3)^T \right\rangle$ (jde o podprostor prostoru $\mathbb{R}^3$) splňuje

$$f((1,1,0)^T) = (7,4,3)^T, \quad f((2,-1,3)^T) = (5,-4,9)^T$$

Spočítejte $f^n((-1,5,-6)^T)$.

Nápověda: Začněte tím, že najdete matici f vzhledem k nějaké bázi prostoru $\mathbf{V}$. Pak najděte jinou bázi tohoto prostoru, vzhledem ke které je matice f v Jordanově tvaru.

Bonusový problém:

Dokažte, že pro každý operátor na $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$ se standardním skalárním součinem, který nemá (reálná) vlastní čísla, existuje ortogonální báze B prostoru $\mathbf{V}$ taková, že matice f vzhledem k B je tvaru

$$[f]_B^B = r \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Dále ukažte, že nelze požadovat, aby B byla ortonormální.