Domácí úkol č. 5 k přednášce NMAG 102: Lineární algebra a geometrie 2, letní semestr 2015–2016

(5.1) Rozhodněte, která z následujících tvrzení platí pro každou reálnou čtvercovou matici A řádu k. Odpověď dokažte.

(a) Pokud $A^2 = A$ a λ je vlastní číslo matice A, pak $\lambda \in \{0, 1\}$.

(b) Pokud $A^2 = A$, pak 0 je vlastním číslem matice A.

(c) Pokud $A^2 = A$, pak 1 je vlastním číslem matice A.

(d) Pokud pro nějaké přirozené číslo n platí $A^n = 0_{k \times k}$ a λ je vlastní číslo matice A, pak $\lambda = 0$.

(e) Pokud pro nějaké přirozené číslo n platí $A^n = 0_{k \times k}$, pak 0 je vlastní číslo matice A.

(5.2) Máme k dispozici neomezenou zásobu tří druhů dlaždic – červené o rozměrech 1×1, modré o rozměrech 2×1 a zelené o rozměrech 2×1 (dlaždice stejného druhu jsou nerozlišitelné). Kolika různými způsoby lze vydláždit chodník o rozměru $n \times 1$? Najděte explicitní (nikoliv pouze rekurentní) vzorec.

Nápověda: Najděte nejprve rekurentní formuli pro počet způsobů vydláždění chodníku (v závislosti na n).

Bonusový problém: Nechť f, g jsou diagonalizovatelné operátory na konečně generovaném prostoru $\mathbf{V}$. Dokažte, že $fg = gf$ právě tehdy, když existuje báze B prostoru $\mathbf{V}$ taková, že každý vektor z B je zároveň vlastním vektorem operátoru f i g.