

Domácí úkol č. 5 k přednášce NMAG 102: Lineární algebra a geometrie 2, letní semestr 2013–2014

Datum odevzdání 2.4.2014 15:30

(5.1) $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_5)$ je báze vektorového prostoru \mathbf{V} nad tělesem \mathbf{T} . Operátor f na \mathbf{V} splňuje pro každé $i \in \{1, \dots, 5\}$ vztah

$$f(\mathbf{v}_i) = \sum_{j=1}^i \mathbf{v}_j .$$

Najděte bázi C prostoru \mathbf{V} tak, aby $[f]_C^C$ byla matice v Jordanově kanonickém tvaru. (Vektory báze C vyjádřete v závislosti na $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_5$.)

Nápověda: Napište si matici operátoru f vzhledem k bázi B a pak můžete postupovat přímočaře.

(5.2) Operátor f na prostoru \mathbb{C}^{13} má vlastní číslo 0 algebraické násobnosti 11 a vlastní číslo 1 algebraické násobnosti 2. Dále víme:

1. $\dim(\text{Ker } f \cap \text{Im } f) = 2$
2. $\dim(\text{Ker } f^3 \cap \text{Im } f^2) = 5$
3. $\dim(\text{Im } f^5) = 3$
4. $\dim(\text{Im } (f - \text{id})) = 12$

Nechť B je nějaká báze prostoru \mathbb{C}^{13} vzniklá spojením Jordanových řetízků. Pro obě vlastní čísla určete počet a délky všech příslušných řetízků v B (a ukažte, že jiné možnosti nejsou).

Nápověda: Doporučené pořadí probírání podmínek je (4), (3), (1), (2).