Domácí úkol č. 4 k přednášce NMAG 102: Lineární algebra a geometrie 2, letní semestr 2013–2014

Datum odevzdání 26.3.2014 15:30

(4.1) Nechť A je matice typu $m \times n$ a B je matice typu $n \times m$ nad stejným tělesem. Dokažte, že je-li $\lambda \neq 0$ vlastní číslo matice AB, pak je λ vlastní číslo matice BA. Ukažte, že pro $\lambda = 0$ tato implikace neplatí a rozhodněte, zda implikace pro $\lambda = 0$ platí za dodatečného předpokladu $n = m$.

Nápověda: K první úloze uhádněte nějaký vlastní vektor matice BA příslušný vlastnímu číslu λ pomocí vlastního vektoru matice AB příslušného vlastnímu číslu λ. Pro další dva úkoly se hodí charakterizace pomocí regularity. Protipříklad na druhý úkol lze vytvořit i pro $\{m, n\} = \{1, 2\}$.

(4.2) Lineární operátor f na prostoru $\mathbf{V} = \left\langle (1,3,-1,1)^T, (0,1,-1,4)^T \right\rangle$ (jde o podprostor prostoru $\mathbb{R}^4$) splňuje

$$f((1,3,-1,1)^T) = (1,2,0,-3)^T, \quad f((2,4,0,-6)^T) = (0,1,-1,4)^T \ .$$

Najděte limity

$$\lim_{k\to\infty} f^{2k}(\mathbf{v}), \quad \lim_{k\to\infty} f^{2k+1}(\mathbf{v})$$

pro vektor

$$\mathbf{v} = (7, 17, -3, -9)^T \ .$$

Bonusový problém: Dokažte, že pro každý operátor na $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$ se standardním skalárním součinem (obecněji na reálném vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ se skalárním součinem $\langle\,|\,\rangle$), který nemá (reálná) vlastní čísla, existuje ortogonální báze B prostoru $\mathbf{V}$ taková, že matice f vzhledem k B je tvaru

$$[f]^B_B = r \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Dále ukažte, že nelze požadovat, aby B byla ortonormální.