Domácí úkol č. 3 k přednášce NMAG 102: Lineární algebra a geometrie 2, letní semestr 2013–2014

Datum odevzdání 19.9.2013 15:30

(3.1) Najděte nějakou reálnou čtvercovou matici A řádu 3, která má vlastní čísla 2 a 3 a příslušné prostory vlastních vektorů

$$M_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\}, \quad M_3 = \left\langle (1,1,1)^T \right\rangle \ .$$

Nápověda: Najděte matici operátoru f_A vzhledem ke vhodné bázi, a pak převeďte do kanonické.

(3.2) Uvažujme diferenční rovnici (tj. diskrétní lineární dynamický systém) $\mathbf{x}_k = A\mathbf{x}_{k-1}$, kde $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^3$ a A je reálná čtvercová matice řádu 3. O matici A máme následující informace:

- A je singulární.
- Součet prvků v každém sloupci je 1.
- Stopa (tj. součet diagonálních prvků) je 0.7.

Konverguje pak nutně posloupnost $(\mathbf{x}_k)_{k=0}^{\infty}$ pro jakýkoliv počáteční vektor $\mathbf{x}_0$? (S konvergencí stačí pracovat neformálně.)

Nápověda: Podívejte se na to, co říkají podmínky o charakteristickém polynomu matice A, přičemž použijte výsledek domácího úkolu 2.1. Z charakteristického polynomu spočítejte vlastní čísla a použijte standardní postup na řešení diferenční rovnice.

Bonusový problém: Nechť f, g jsou diagonalizovatelné operátory na konečně generovaném prostoru $\mathbf{V}$. Dokažte, že $fg = gf$ právě tehdy, když existuje báze B prostoru $\mathbf{V}$ taková, že každý vektor z B je zároveň vlastním vektorem operátoru f i operátoru g.