Domácí úkol č. 2 k přednášce NMAG111: Lineární algebra 1
zimní semestr 2021/2022

Datum odevzdání 20. října 2021, 12.20

(2.1) Najděte všechna řešení soustavy rovnic v závislosti na parametrech $a, b \in \mathbb{C}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -i & a & 2-4i & 0 \\ 1 & 2i & b & 0 \\ i & -2 & i & -1 \end{array}\right)$$

Poznámka: Slovo „parametr“ zde využíváme v jiném významu než „volná proměnná“. Zadáním myslíme to, že pro každou volbu komplexních čísel a, b máte najít všechna řešení dané soustavy třech rovnic o třech neznámých. Je možné, že existence, počet řešení, atd., závisí na a, b – proveďte diskuzi (tzn. dejte pozor, abyste soustavu skutečně vyřešili pro všechny volby a, b)!

(2.2) Uvažujme přímku p v $\mathbb{R}^3$ zadanou parametricky jako

$$p = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ : \ t \in \mathbb{R} \right\}.$$

a) Pro která $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ obsahuje rovina s obecnou rovnicí $ax + by + cz = d$ přímku p?

b) Najděte nějakou soustavu 2 lineárních rovnic o 3 neznámých, jejichž množina všech řešení je rovna p.

Poznámka: V části a) je třeba popsat všechny čtveřice splňující danou podmínku. V části a) také skrytě vyžadujeme, aby rovnice $ax + by + cz = d$ popisovala rovinu, tj. je třeba vyloučit různé degenerované případy. Naopak v části b) stačí najít jednu soustavu rovnic.
Návodné otázky: Jakého tvaru jsou (podle zadání) souřadnice (x, y, z) bodu na přímce p? Co je třeba k tomu, aby všechny takové body (x, y, z) ležely v dané rovině?

Bonusový problém: Existuje soustava lineárních rovnic, která má v reálných číslech právě dvě (různá) řešení?