Domácí úkol č. 12 k přednášce NMAG101: Lineární algebra 1
zimní semestr 2021/2022

Datum odevzdání pátek 14. ledna 2022, 9.00

(12.1) Determinant reálné matice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & x & -2x \\ -3x & 3 & x & 2 \\ 4 & \pi & x & 5 \\ e & x & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

je polynom v proměnné x. **Přímo z definice determinantu** najděte koeficienty tohoto polynomu u x^4 a x^3 (tj. nesmíte např. vypočítat celý determinant nějakou jinou metodou a pak se podívat na koeficienty).

(12.2) Permutace $\alpha, \beta \in S_9$ jsou dány redukovaným cyklickým zápisem.

$$\alpha = (3\ 1\ 2\ 6)(4\ 9\ 5), \quad \beta = (5\ 1\ 3\ 8)(2\ 6\ 7)$$

(a) Dokažte, že pro libovolnou permutaci $\pi \in S_9$ je redukovaný cyklický zápis permutace $\pi\alpha\pi^{-1}$ tvaru $(x_1\ x_2\ x_3\ x_4)(x_5\ x_6\ x_7)$. (Nápověda: kam se zobrazí $\pi(1)$?)

(b) Určete počet permutací $\pi \in S_9$, pro které platí $\pi\alpha\pi^{-1} = \beta$.

Bonusový problém: Následující úloha je klíčovým krokem v důkazu, že rovnice pátého a vyššího stupně nelze vyřešit „vzorečkem“ typu $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Označme A_n množinu všech sudých permutací v S_n, kde $n \geq 5$. Množina $M \subseteq A_n$ splňuje následující:

- M obsahuje nějakou neidentickou permutaci.
- M je uzavřená na skládání: $(\forall \pi, \rho \in M)\ \pi\rho \in M$.
- M je uzavřená na konjugování libovolnou sudou permutací: $(\forall \pi \in M)(\forall \rho \in A_n)\ \rho^{-1}\pi\rho \in M$.

Dokažte, že nutně $M = A_n$ a že toto není pravda pro $n = 4$.

Poznámka: Po vyřešení bodu (a) vás asi napadne, že permutace $\pi\alpha\pi^{-1}$ a α mají obecně vždy stejný „cyklický typ“ – v zápisu pomocí nezávislých cyklů mají stejný počet cyklů každé délky. To je pravda (ale bez důkazu to nemůžete ve svém řešení použít). Permutace $\pi\alpha\pi^{-1}$ se nazývá *konjugovaná* permutace k permutaci α.

Konjugování lze využít například na vyřešení Rubikovy kostky: Označme α permutaci odpovídající pootočení horní stěny o 90 stupňů a π permutaci, která prohazuje dvě sousední hranové kostičky v horní stěně a všechny ostatní kostičky v horní stěně nechává na místě (ostatní kostičky můžeme promíchat libovolně). Takový tah π asi umí nalézt téměř každý, kdo si nějakou dobu s Rubikovou kostkou hrál. Po vyřešení části (a) by neměl být problém si rozmyslet, co udělá tah $\pi\alpha\pi^{-1}$, a pak tah $\alpha^{-1}\pi\alpha\pi^{-1}$. Zjistíte, že druhý tah cyklicky rotuje tři hranové kostičky a všechny ostatní kostičky nechává na místě. Těmito tahy lze přesunout všechny hranové kostičky na správné místo. Podobným trikem lze vymyslet tahy, které umožní přesunout rohové kostičky na správné místo, a také opravit orientaci rohových a hranových kostiček.