Domácí úkol č. 12 k přednášce NMAG 102: Lineární algebra a geometrie 2, letní semestr 2013–2014

Datum odevzdání 21.5.2014 15:30

(12.1) Nechť $\mathbf{A}$ je afinní prostor nad $\mathbf{T}$ dimenze alespoň 1, $a_1, \dots, a_k$ jsou body a $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in T$ skaláry. Dokažte, že pokud bod b o souřadnicích $[b]_S = \lambda_1[a_1]_S + \cdots + \lambda_k[a_k]_S$ nezávisí na volbě soustavy souřadnic S, pak $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$.

Nápověda: Zvolte dvě různé soustavy souřadnic S, S', které se liší pouze počátkem. Označte b, b' body o souřadnicích $[b]_S = \lambda_1[a_1]_S + \cdots + \lambda_k[a_k]_S$, $[b']_{S'} = \lambda_1[a_1]_{S'} + \cdots + \lambda_k[a_k]_{S'}$. Z předpokladu víme, že $b = b'$. Pomocí přechodových vztahů vyjádřete $[a_1]_{S'}, \dots, [b]_{S'}$ pomocí $[a_1]_S, \dots, [b]_S$ a dosaďte.

(12.2) V aritmetickém afinním prostoru $\mathbb{Z}_5^3$ najděte všechny příčky přímek P a Q procházející bodem c. (Příčka přímek P a Q je přímka, která má neprázdný průnik s P i Q.)

$$P = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nápověda: Uvědomte si, že průnik hledané příčky s přímkou Q leží v rovině obsahující P a c. (Situaci si lze dobře představit nad $\mathbb{R}$.)

Bonusový problém: Uvažujme tři body a_1, a_2, a_3 v afinním eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^2$ se standardním skalárním součinem, které neleží na jedné přímce. Najděte barycentrické souřadnice

(a) průsečíku výšek trojúhelníku $a_1a_2a_3$

(b) středu kružnice vepsané trojúhelníku $a_1a_2a_3$

v barycentrické soustavě souřadnic (a_1, a_2, a_3). Barycentrické souřadnice vyjádřete pomocí daných bodů a_1, a_2, a_3, odčítání, skalárního součinu a normy.