Domácí úkol č. 1

Datum odevzdání: úterý 1. 3. 2021. do 14:00.

(1.1) Dokažte, že v libovolném komplexním vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ se skalárním součinem $\langle , \rangle$ platí (pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$)

$$\mathrm{Re}\,(\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle) = \frac{1}{4}(\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2) \ ,$$
$$\mathrm{Im}\,(\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle) = \frac{1}{4}(\|\mathbf{u}-i\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}+i\mathbf{v}\|^2) \ ,$$

kde $\mathrm{Re}\,(x)$ značí reálnou a $\mathrm{Im}\,(x)$ imaginární část komplexního čísla x. (Pro inspiraci viz Tvrzení 8.32.)

(1.2) Zobrazení $\langle , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je dáno vzorcem

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^T A \mathbf{v}$$

kde A je reálná symetrická čtvercová matice $A = (a_{ij})$ řádu 2. Dokažte, že $\langle , \rangle$ je skalární součin na $\mathbb{R}^2$ právě tehdy, když platí

$$a_{11} > 0 \quad \text{a} \quad \det(A) > 0 \ .$$

(Pro inspiraci viz Příklad 8.18.)

Bonusový problém: Buď $A = (a_{ij})$ reálná symetrická matice řádu n. Pro $1 \le k \le n$ označme $A_k = (a_{ij})_{i,j \le k}$ matici řádu k, která vznikne z matice A vynecháním posedních $n-k$ řádků a posledních $n-k$ sloupců. Ukažte, že matice A určuje skalární součin na $\mathbb{R}^n$ právě když $\det(A_k) > 0$ pro všechna $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.