Cvičení k přednášce NMAG112 Lineární algebra 2

Zadání

Verze ze dne 5. května 2022

12 Bilineární formy

Cíle cvičení:

- Pro obecné bilineárních formy procvičit počítání matic a rozkladů na symetrickou a antisymetrickou část.
- Naučit se hledat ortogonální báze symetrických bilineárních a kvadratických forem.

Řešené příklady:

Úloha 12.1. Uvažujme zobrazení $f\colon \mathbb{Z}_5^2 \times \mathbb{Z}_5^2 \to \mathbb{Z}_5$ dané předpisem (analytickým vyjádřením)

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 4x_2y_1 + 3x_2y_2$$

Ověřte, že je f bilineární forma a najděte matice f vzhledem ke kanonické bázi a vzhledem k bázi $B = \big((3,3)^T, (4,1)^T\big)$.

Úloha 12.2. Buď f bilineární forma

$$f\big((x_1,x_2,x_3)^T, (y_1,y_2,y_3)^T\big) = x_1y_2 + 3x_1y_3 + 6x_2y_2 + 2x_2y_3 + 2x_3y_1 + x_3y_3$$

na vektorovém prostoru $\mathbb{Z}_7^3$. Určete matice f, f_s a f_a vzhledem ke kanonické bázi a k bázi $B = \big((1,1,2)^T, (1,0,1)^T, (1,0,6)^T\big)$, kde f_s je symetrická a f_a antisymetrická bilineární forma, pro něž $f = f_s + f_a$.

Úloha 12.3. Nechť $g_2(x_1,x_2,x_3) = 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 - 6x_2x_3 + x_3^2$ je kvadratická forma.

(a) Najděte matici symetrické bilineární formy g na $\mathbb{R}^3$ vzhledem ke kanonické bázi, která vytváří kvadratickou formu g_2,

(b) určete hodnost g a rozhodněte, zda je g regulární,

(c) najděte g-ortogonální bázi prostoru $\mathbb{R}^3$.

Úloha 12.4. Najděte nějakou f-ortogonální bázi B kvadratické formy f_2 na vektorovém prostoru $\mathbb{Z}_5^3$ s analytickým vyjádřením vzhledem ke kanonické bázi

$$f_2(x_1,x_2,x_3)^T = 2x_1^2 + 3x_1x_2 + x_1x_3 + 4x_2^2 + x_2x_3$$

a určete $[f]_B$.

Úloha 12.5. Najděte nějakou f-ortogonální bázi symetrické bilineární formy f a její matici vzhledem k f-ortogonální bázi, je-li

(a) f bilineární forma na vektorovém prostoru $\mathbb{Q}^2$ s maticí

$$[f]_{K_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

vzhledem ke kanonické bázi,

(b) f bilineární forma na vektorovém prostoru $\mathbb{Z}_5^2$ s analytickým vyjádřením vzhledem ke kanonické bázi

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_2,$$

(c) f bilineární forma na vektorovém prostoru $\mathbb{Z}_5^2$ s maticí

$$[f]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

vzhledem k bázi $B = \big((1,2)^T, (2,3)^T\big)$,

(d) f bilineární forma na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ s analytickým vyjádřením vzhledem ke kanonické bázi

$$f\big((x_1,x_2,x_3)^T, (y_1,y_2,y_3)^T\big) = x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_3 - x_3y_2,$$

(e) f bilineární forma na vektorovém prostoru $\mathbb{Z}_7^3$ s maticí

$$[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 6 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

vzhledem k bázi $B = \big((1,0,2)^T, (1,0,1)^T, (0,3,1)^T\big)$.

Další základní příklady k počítání:

Úloha 12.6. Najděte matici bilineární formy g na $\mathbb{Q}^3$ vzhledem k bázi D, znáte-li její matici vzhledem k bázi C, jestliže $C = \big((1,1,1)^T, (1,1,0)^T, (1,0,0)^T\big)$, $D = \big((1,0,2)^T, (2,-1,0)^T, (1,0,1)^T\big)$ a

$$[g]_C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Úloha 12.7. Nechť f, g jsou formy a B a C báze z úloh **??** a **??** a uvažujme symetrické bilineární formy f_s a g_s a antisymetrické bilineární formy f_a a g_a splňující pro které $f = f_s + f_a$, $g = g_s + g_a$. Najděte matice $[f_s]_B$, $[f_a]_B$, $[g_s]_C$, $[g_a]_C$.

Úloha 12.8. Rozložte matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ na součin LDL^T, kde L je dolní trojúhelníková s jedničkami na diagonále a D je diagonální.