Cvičení k přednášce NMAG112 Lineární algebra 2

Řešení
Verze ze dne 27. dubna 2022

11 Singulární rozklad

Cíle cvičení:

- Procvičit počítání singulárních rozkladů (SVD) a dyadických rozkladů.
- Procvičit aplikace SVD na hledání spektrální normy a aproximace matice maticí nižší hodnosti.

Řešené příklady:

Úloha 11.1. Najděte singulární rozklady reálných matic

$$\text{(a)}\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)}\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zapište ve formě matice f_A vzhledem k ortonormálním bázím, jako maticový rozklad a jako dyadický rozklad.

Pozn.: V části (b) je snazší počítat přes singulární rozklad matice A^T.

Řešení. (a) Nejprve spočítáme symetrickou matici $A^T A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$. Vlastní čísla jsou v sestupném pořadí $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 4$ a příslušné normované vlastní vektory

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Odmocněním najdeme singulární hodnoty $\sigma_1 = \sqrt{6}, \sigma_2 = 2$. Vypočítáme

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} A\,\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{2} A\,\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Rovnou zkontrolujeme, že $\mathbf{u}_1$ a $\mathbf{u}_2$ jsou jednotkové a navzájem kolmé. Na ortonormální bázi prostoru $\mathbb{R}^3$ tuto dvojici vektorů doplňuje (až na směr jednoznačně určený) vektor $\mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Vzhledem k ortonormálním bázím $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ a $C = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ má f_A matici $[f_A]_C^B = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

To nám dává maticový rozklad

$$A = [\mathrm{id}]_{K_3}^C [f_A]_C^B ([\mathrm{id}]_{K_2}^B)^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & 2 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ve formě dyadického rozvoje lze tentýž vztah zapsat

$$A = \sqrt{6}\,\mathbf{u}_1\,\mathbf{v}_1^T + 2\,\mathbf{u}_2\,\mathbf{v}_2^T = \sqrt{6}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\\-1 & -1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 0\\1 & -1\end{pmatrix}.$$

(b) V tomto případě je matice AA^T řádu 2, matice A^TA řádu 3, je tedy lepší počítat singulární rozklad matice A^T. Připomeňme, že je-li $[f_A]^B_C = D$, kde B, C jsou ortonormální, pak $[f_{A^T}]^C_B = D^T$. Maticově, je-li $A = UDV^T$ singulární rozklad matice A, pak $A^T = VD^TU^T$ je singulární rozklad matice A^T.

Spočítáme $AA^T = \begin{pmatrix}3 & 1\\1 & 3\end{pmatrix}$, její vlastní čísla 4 a 2, a příslušné vlastní vektory $(1,1)^T$, $(1,-1)^T$. Příslušná singulární čísla jsou 2 a $\sqrt{2}$, jimž odpovídají vektory $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^T$, $\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)^T$. Pomocí vztahu $\mathbf{v}_i = \frac{1}{\sigma_i}A^T\,\mathbf{u}_i$ dopočítáme vektory $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)^T$, $\mathbf{v}_2 = (0,1,0)^T$ a doplníme do ortonormální báze $\mathbb{R}^3$ vektorem $\mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)^T$. Vzhledem k bázím $C = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ a $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ má f_{A^T} matici

$$[f_{A^T}]^C_B = \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & \sqrt{2}\\0 & 0\end{pmatrix},$$

čili vzhledem k bázím B a C má f_A matici $[f_A]^B_C = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & \sqrt{2} & 0\end{pmatrix}$ Maticově a dyadicky zapsáno

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & -1 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & \sqrt{2} & 0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & \sqrt{2} & 0\\1 & 0 & -1\end{pmatrix} = 2\,\mathbf{u}_1\,\mathbf{v}_1^T + \sqrt{2}\,\mathbf{u}_2\,\mathbf{v}_2^T.$$ □

Úloha 11.2. Pro matice A ze cvičení 11.1 určete:

(a) $\operatorname{Im} A$, $(\operatorname{Im} A)^\perp$, $\operatorname{Ker} A$, $(\operatorname{Ker} A)^\perp$,

(b) obraz jednotkové sféry $S = \{\mathbf{x} : ||\,\mathbf{x}\,|| = 1\}$,

(c) spektrální normu $||A||$ a množinu vektorů $\mathbf{x}$, pro které nastane rovnost $||A\,\mathbf{x}\,|| = ||A||\,||\,\mathbf{x}\,||$.

Řešení. (a) Pro matici $A = \begin{pmatrix}2 & 0\\1 & 1\\0 & -2\end{pmatrix}$ je $[\operatorname{Im} A]_C = \operatorname{Im}[f_A]^B_C = \operatorname{LO}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, neboli $\operatorname{Im} A = \operatorname{LO}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ (a posloupnost $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ tvoří bázi $\operatorname{Im} A$). Ortogonální doplněk $\operatorname{Im} A$ je roven $\operatorname{LO}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}^\perp = \operatorname{LO}\{\mathbf{u}_3\}$. Jádro $\operatorname{Ker} A$ je prostor $\{0\}$, jeho ortogonální doplněk celé $\mathbb{R}^2$.

Pro matici $A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ je $\operatorname{Im} A$ celý prostor $\mathbb{R}^2$, ortogonální doplněk obrazu je $\{0\}$. Pro jádro máme $[\operatorname{Ker} A]_B = \operatorname{Ker}[f_A]^B_C = \operatorname{LO}\{\mathbf{e}_3\}$, neboli $\operatorname{Ker} A = \operatorname{LO}\{\mathbf{v}_3\}$. Ortogonální doplněk jádra je $\operatorname{LO}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.

(b) Pro matici $A = \begin{pmatrix}2 & 0\\1 & 1\\0 & -2\end{pmatrix}$ je obrazem jednotkové sféry $S \subset \mathbb{R}^2$ elipsa (křivka) ležící v rovině $\operatorname{Im} A$ se středem v počátku a poloosami $\sqrt{6}\,\mathbf{u}_1$, $2\,\mathbf{u}_2$. Pro matici $A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ je obrazem sféry $S \subset \mathbb{R}^3$ povrch degenerovaného elipsoidu se středem v počátku s poloosami $2\,\mathbf{u}_1, \sqrt{2}\,\mathbf{u}_2, 0\,\mathbf{u}_3$, což je elipsa i s vnitřkem se středem v počátku a poloosami $2\,\mathbf{u}_1$, $\sqrt{2}\,\mathbf{u}_2$.

(c) Pro matici $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ je $||A|| = \sqrt{6}$ a rovnost $||A\,\mathbf{x}\,|| = ||A||\,||\,\mathbf{x}\,||$ nastane právě pro vektory $\mathbf{x} \in \mathrm{LO}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, což jsou přesně vlastní vektory matice $A^T A$ příslušné vlastnímu číslu 6. Pro matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ je $||A|| = 2$ a rovnost $||A\,\mathbf{x}\,|| = ||A||\,||\,\mathbf{x}\,||$ nastane právě pro vektory $\mathbf{x} \in \mathrm{LO}\{\mathbf{v}_1\} = \mathrm{LO}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. □

Úloha 11.3. Najděte singulární rozklady reálné matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, když víte, že matice

$$A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

má vlastní čísla 0, 1 a 9. Určete spektrální normu této matice a množinu vektorů $\mathbf{x}$, pro které nastane rovnost $||A\,\mathbf{x}\,|| = ||A||\,||\,\mathbf{x}\,||$.

Řešení. Nejprve spočteme ortonormální bázi z vlastních vektorů matice $A^T A$. Vlastní vektory bereme v pořadí od největšího vlastního čísla:

$$B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = (\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}).$$

Singulární hodnoty matice A jsou 3 a 1. Opět pomocí vztahu $\mathbf{u}_i = \frac{1}{\sigma_i} A\,\mathbf{v}_i$ spočteme vektory

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{3} A(\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}) = \frac{1}{3\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}_2 = A(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

které doplníme vektorem $\mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ na ortonormální bázi $C = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$. Máme tedy singulární rozklad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = UDV^T = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 2 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Spektrální norma matice A je rovna nejvyšší singulární hodnotě, tedy dostaneme $||A|| = 3$. Rovnost $||A\,\mathbf{x}\,|| = ||A||\,||\,\mathbf{x}\,||$ nastane přesně pro vlastní vektory $A^T A$ příslušné vlastnímu číslu 9, tj. pro $\mathbf{x} \in \mathrm{LO}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. □

Úloha 11.4. Matice $\begin{pmatrix}5&2&0\\0&2&5\\2&7&2\end{pmatrix}$ má singulární rozklad

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt6}&-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{2}{\sqrt6}&0&-\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9&0&0\\0&5&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{2}{\sqrt6}&0&-\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt6}&-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}^T$$

Najděte dyadický rozklad matice A a matici $\hat{A}$ hodnosti 2 tak, aby spektrální norma $||A-\hat{A}||$ byla co nejmenší. Určete obraz jednotkové sféry pro matice A a $\hat{A}$.

Řešení. Dyadický rozklad matice je

$$A=9\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}1&2&1\end{pmatrix}+5\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1&0&-1\end{pmatrix}+3\frac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix}1&-1&1\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{3}{2}\begin{pmatrix}1&2&1\\1&2&1\\2&4&2\end{pmatrix}+\frac{5}{2}\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&-1&1\\-1&1&-1\end{pmatrix}$$

Matici hodnosti 2 získáme sečtením členů přílušným dvěma nejvyšším singulárním číslům, tedy

$$\hat{A}=\frac{3}{2}\begin{pmatrix}1&2&1\\1&2&1\\2&4&2\end{pmatrix}+\frac{5}{2}\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&3&-1\\-1&3&4\\3&6&3\end{pmatrix}$$

Jednotková sféra S se maticí A zobrazí na povrch třírozměrného elipsoidu se středem v počátku a poloosami $9\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$, $5\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $3\frac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

Jednotková sféra S se maticí $\hat{A}$ zobrazí na elipsu s vnitřkem ležící v rovině $\operatorname{Im}\hat{A}$, se středem v počátku a poloosami $9\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$, $5\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$.

Všimněte si, že $f_{\hat{A}}(S)$ je ortogonální projekce $f_A(S)$ do roviny LO $\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$. □

Další základní příklady k počítání:

Úloha 11.5. Najděte singulární rozklady reálných matic

(a) $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$, (b) $A=\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\\-2&2\end{pmatrix}$, (c) $A=\begin{pmatrix}0&3&0\\1&0&0\\0&4&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, (d) $A=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\2&0&1&1\\1&-1&1&0\end{pmatrix}$.

Řešení: (a) $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt2&0&0\\0&\sqrt3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt3}\\-\frac{2}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix}$,

(b) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$,

(c) $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

(d) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.

Úloha 11.6. Najděte singulární rozklad komplexní matice

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

Řešení: $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

Úloha 11.7. Najděte singulární rozklad reálné matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a najděte matici $\hat{A}$ hodnosti 1 tak, aby spektrální norma $||A - \hat{A}||$ byla co nejmenší.

Řešení: Například $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ a

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Rozšiřující příklady:

Úloha 11.8. Uvažujme soustavu rovnic $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ s maticí z úlohy 11.5.

(a) Jaké jsou spektrální normy $||A||$, $||A^{-1}||$?

Vektor $\mathbf{b}$ je vektor naměřených dat s maximální chybou měření $\delta\,\mathbf{b}$, $||\delta\,\mathbf{b}\,|| = 1$.

(b) Jaká je maximální absolutní chyba řešení uvažované soustavy?

(c) Jaká je maximální relativní chyba řešení uvažované soustavy? (Kolikrát je $\frac{||\delta x||}{||x||}$ větší než $\frac{||\delta b||}{||b||}$?)

Řešení. (a) Spektrální norma matice je maximální délka obrazu jednotkového vektoru, tedy odpovídá maximálnímu singulárnímu číslu. Proto $\|A\| = 9$, $\|A\|^{-1} = \frac{1}{3}$.

(b) Pro soustavu $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ s pravou stranou zatíženou chybou dat platí, že $A(\mathbf{x} + \delta\,\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \delta\,\mathbf{b}$. Proto $A\delta\,\mathbf{x} = \delta\,\mathbf{b}$, tedy $\delta\,\mathbf{x} = A^{-1}\delta\,\mathbf{b}$. Tedy $\|\delta\,\mathbf{x}\| = \|A^{-1}\delta\,\mathbf{b}\| \le \|A^{-1}\| \cdot \|\delta\,\mathbf{b}\|$. Tedy absolutní chyba řešení je nejvýše $\|A^{-1}\|\,\|\delta\,\mathbf{b}\| = \frac{1}{3}$. Pokud by platilo $\delta\,\mathbf{b} \in \mathrm{LO}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$, pak $A^{-1}\delta\,\mathbf{b} = \frac{1}{3\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, tedy $\|\delta\,\mathbf{x}\| = \frac{1}{3}\,\|\delta\,\mathbf{b}\|$ a odhad $\|\delta\,\mathbf{x}\| \le \frac{1}{3}\,\|\delta\,\mathbf{b}\|$ je v tomto smyslu nejlepší možný.

(c) Chceme odhadnout $\frac{\|\delta\,\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$ pomocí $\frac{\|\delta\,\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$. Už víme, že $\frac{\|\delta\,\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \le \|A^{-1}\|\,\frac{\|\delta\,\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{x}\|}$. Potřebujeme tedy využít nějaký vztah $\|\mathbf{x}\|$ a $\|\mathbf{b}\|$. Platí $\|A\,\mathbf{x}\| = \|\mathbf{b}\|$, tedy z definice normy $\|\mathbf{b}\| \le \|A\| \cdot \|\mathbf{x}\|$, tedy $1/\,\|\mathbf{x}\| \le \|A\|\,/\,\|\mathbf{b}\|$. Dosazením získáme odhad

$$\frac{\|\delta\,\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \le \left\|A^{-1}\right\| \frac{\|\delta\,\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{x}\|} \le \|A\| \cdot \left\|A^{-1}\right\| \frac{\|\delta\,\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} = 3\frac{\|\delta\,\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}.$$

Pokud by platilo $\delta\,\mathbf{b} \in \mathrm{LO}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ a $\mathbf{b} \in \mathrm{LO}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$, pak by nastala rovnost:

$$\frac{\|\delta\,\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{\|A^{-1}\delta\,\mathbf{b}\|}{\|A^{-1}\,\mathbf{b}\|} = \frac{\frac{1}{3}\,\|\delta\,\mathbf{b}\|}{\frac{1}{9}\,\|\mathbf{b}\|} = 3\frac{\|\delta\,\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}.$$

Tedy odhad je opět nejlepší možný. □

Úloha 11.9. Pro reálnou matici $A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\\1 & 2 & 1\end{pmatrix}$ ze cvičení 11.3

(a) najděte Moore-Penroseovu pseudoinverzní matici $A^\dagger$,

(b) najděte aproximaci řešení soustavy $A\mathbf{x} = (6, 2, 5)^T$ metodou nejmenších čtverců, která má navíc nejmenší možnou normu.

Řešení. (a) Ve cvičení 11.3 jsme spočítali singulární rozklad

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\\1 & 2 & 1\end{pmatrix} = UDV^T = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3} & \sqrt{2}\\1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2}\\2 & 0 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2}\\\sqrt{3} & -\sqrt{3} & \sqrt{3}\end{pmatrix},$$

což můžeme zapsat tak, že $A = 3 \cdot \mathbf{u}_1\,\mathbf{v}_1^T + 1 \cdot \mathbf{u}_2\,\mathbf{v}_2^T$. Moore-Penroseova pseudoinverzní matice je potom tvaru

$$A^\dagger = \frac{1}{3} \cdot \mathbf{v}_1\,\mathbf{u}_1^T + \mathbf{v}_2\,\mathbf{u}_2^T = \frac{1}{18}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\2 & 2 & 4\\1 & 1 & 2\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 0 & 0\\-1 & 1 & 0\end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}5 & -4 & 1\\1 & 1 & 2\\-4 & 5 & 1\end{pmatrix}.$$

(b) Hledaná aproximace je $A^\dagger\,\mathbf{b} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}5 & -4 & 1\\1 & 1 & 2\\-4 & 5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\2\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$ □