Cvičení k přednášce NMAG112 Lineární algebra 2

Zadání

Verze ze dne 17. března 2022

6 Diagonalizovatelnost (1. část)

Cíle cvičení:

- Naučit se rozhodovat, zda jsou matice či operátory diagonalizovatelné,
- počítat matice přechodu a báze s odpovídající maticí v diagonálním tvaru,
- naučit se využívat diagonálního tvaru k mocnění matic.

Řešené příklady:

Úloha 6.1. Pro lineární operátor φ na reálném vektorovém prostoru $\mathbb{R}^2$ rozhodněte, zda je φ diagonalizovatelný, a pokud ano, najděte bázi B a matici $[\varphi]_B^B$, aby byla matice diagonální.

$$\text{(a)}\quad [\varphi]_{K_2}^{K_2} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)}\quad [\varphi]_{K_2}^{K_2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{(c)}\quad [\varphi]_{K_2}^{K_2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Úloha 6.2. Je-li φ lineární operátor na vektorovém prostoru $\mathbb{Z}_5^3$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ s maticí

$$[\varphi]_{K_3}^{K_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

vzhledem ke kanonické bázi K_3, ověřte, že je φ bijekce a rozhodněte, zda jsou operátory φ a φ^{-1} diagonalizovatelné .

Úloha 6.3. Uvažujme reálnou matici $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Spočítejte všechna vlastní čísla a všechny vlastní vektory matic A a A^4 a rozhodněte, zda jsou matice diagonalizovatelné.

Úloha 6.4. Ověřte, že je matice A diagonalizovatelná, najděte regulární matici P, pro kterou je $P^{-1}AP$ diagonální a spočítejte matice $P^{-1}AP$, a A^{1001}.

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ matice nad tělesem $\mathbb{Z}_3$,

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ matice nad tělesem $\mathbb{Z}_5$.

Další základní příklady k počítání:

Úloha 6.5. Najděte všechna vlastní čísla a všechny vlastní vektory rozhodněte, zda jsou diagonalizovatelné reálné matice

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, \text{(b)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{(c)} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \text{(d)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Úloha 6.6. Operátor f na $\mathbb{Z}_7^2$ splňuje $f((2,1)^T) = (0,5)^T, \quad f((1,1)^T) = (6,2)^T$. Určete jeho charakteristický polynom a vlastní čísla a rozhodněte, zda je diagonalizovatelný.

Úloha 6.7. Matice lineárního operátoru f na prostoru $\mathbb{Z}_5^2$ vzhledem k bázi $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ je $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$. Zjistěte, zda je f diagonalizovatelný. Pokud ano, najděte bázi C takovou, že $[f]_C^C$ je diagonální, a určete $[f]_C^C$. Kolik bází C, pro něž je $[f]_C^C$ diagonální existuje?