Cvičení k přednášce NMAG112 Lineární algebra 2

Řešení
Verze ze dne 17. března 2022

6 Diagonalizovatelnost (1. část)

Cíle cvičení:

- Naučit se rozhodovat, zda jsou matice či operátory diagonalizovatelné,
- počítat matice přechodu a báze s odpovídající maticí v diagonálním tvaru,
- naučit se využívat diagonálního tvaru k mocnění matic.

Řešené příklady:

Úloha 6.1. Pro lineární operátor φ na reálném vektorovém prostoru $\mathbb{R}^2$ rozhodněte, zda je φ diagonalizovatelný, a pokud ano, najděte bázi B a matici $[\varphi]_B^B$, aby byla matice diagonální.

$$\text{(a)}\quad [\varphi]_{K_2}^{K_2} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)}\quad [\varphi]_{K_2}^{K_2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{(c)}\quad [\varphi]_{K_2}^{K_2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Řešení. (a) Nejprve spočítáme vlastní čísla operátoru φ, které jsou rovné vlastním číslům matice $[\varphi]_{K_2}^{K_2}$, pomocí charakteristického polynomu

$$\det([\varphi]_{K_2}^{K_2} - \lambda I_2) = \lambda^2 - (3+6)\lambda + (3\cdot 6 - 2\cdot 2) = \lambda^2 - 9\lambda + 14 = (\lambda - 2)(\lambda - 7).$$

(Použili jsme tvrzení 9.32 ze skript o význačných koeficientech charakteristického polynomu.) Vlastní čísla operátoru φ jsou tedy právě čísla 2 a 7. Nyní najdeme pro obě vlastní čísla podprostory příslušných vlastních vektorů:

$$M_2 = [M_2]_{K_2} = \operatorname{Ker}([\varphi]_{K_2}^{K_2} - 2\cdot I_2) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \operatorname{LO}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\},$$
$$M_7 = [M_7]_{K_2} = \operatorname{Ker}([\varphi]_{K_2}^{K_2} - 7\cdot I_2) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{LO}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}.$$

Protože z vlastních vektorů můžeme sestavit bázi $B = ((-2,1)^T, (1,2)^T)$, jde o diagonalizovatelný lineární operátor a hledaná matice operátoru vzhledem k B je $[\varphi]_B^B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$.

(b) I tentokrát nejprve přímočaře spočítáme vlastní čísla operátoru φ pomocí charakteristického polynomu

$$\det([\varphi]_{K_2}^{K_2} - \lambda I_2) = (2-\lambda)(6-\lambda) + 4 = \lambda^2 - 8\lambda + 16 = (\lambda - 4)^2.$$

Lineární operátor φ má jediné vlastní číslo 4 algebraické násobnosti 2. Spočítáme-li množinu vlastních vektorů

$$\operatorname{Ker}([\varphi]_{K_2}^{K_2} - 4I_2) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{LO}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\},$$

vidíme, že všechny vlastní vektory tvoří přímku, tedy z nich nesestavíme bázi prostoru $\mathbb{R}^2$, a proto lineární operátor φ není diagonalizovatelný.

(c) Z charakteristického polynomu

$$\det([\varphi]_{K_2}^{K_2} - \lambda I_2) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 4 & 5-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda - 7 = (\lambda + 1)(\lambda - 7).$$

dostáváme vlastní čísla $\{-1, 7\}$ operátoru φ. Nyní řešíme homogenních soustav rovnic s maticemi

$$[\varphi]_{K_2}^{K_2} + 1 \cdot I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad [\varphi]_{K_2}^{K_2} - 7 \cdot I_2 = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Najdeme tak všechny vlastní vektory $\mathrm{LO}\left\{\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}\right\} \cup \mathrm{LO}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$. Protože z vlastních vektorů můžeme sestavit bázi $B = \left(\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$, je lineární operátor φ diagonalizovatelný a $[\varphi]_B^B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$. □

Úloha 6.2. Je-li φ lineární operátor na vektorovém prostoru $\mathbb{Z}_5^3$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ s maticí

$$[\varphi]_{K_3}^{K_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

vzhledem ke kanonické bázi K_3, ověřte, že je φ bijekce a rozhodněte, zda jsou operátory φ a φ^{-1} diagonalizovatelné .

Řešení. Abychom našli vlastní čísla lineárního operátoru φ, spočítáme nejprve jeho charakteristický polynom

$$\det([\varphi]_{K_3}^{K_3} - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ 3 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2+1).$$

Dosazením za λ všech hodnot tělesa $\mathbb{Z}_5$ zjistíme, že vlastní čísla tvoří právě hodnoty $\{1, 2, 3\}$. Jak víme z důsledku 9.63 ze skript, lineární operátor na vektorovém prostoru dimenze 3 se třemi různými vlastními čísly je nutně diagonalizovatelný. Můžeme ale i přímo dosadit do matice $[\varphi]_{K_3} - \lambda I_3$ nalezená vlastní čísla a spočítat vlastní vektory řešením homogenních soustav rovnic s maticemi,

$$[\varphi]_{K_3}^{K_3} - 1 \cdot I_3 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad [\varphi]_{K_3}^{K_3} - 2 \cdot I_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad [\varphi]_{K_3}^{K_3} - 3 \cdot I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Všechny vlastní vektory operátoru φ jsou právě prvky

$$M = \mathrm{LO}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \cup \mathrm{LO}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \cup \mathrm{LO}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$$

a snadno nahlédneme, že z vlastních vektorů sestavíme bázi. Tím dostaneme konkrétnější důkaz diagonalizovatelnosti operátoru φ.

Máme spočítáno, že nula není vlastní číslo, proto je jádro operátoru nulové a tudíž je φ bijektivní. Protože $\lambda\varphi^{-1}(\mathbf{v}) = \varphi^{-1}(\lambda\,\mathbf{v}) = \varphi^{-1}(\varphi\,\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ pro každé vlastní číslo λ operátoru φ a jemu příslušný vlastní vektor $\mathbf{v}$, jsou $\{1^{-1}, 2^{-1}, 3^{-1}\} = \{1, 3, 2\}$ opět všechna vlastní čísla matice lineárního operátoru φ^{-1} a snadno spočítáme, že množina vlastních vektorů zůstává stejná, t.j. M. Proto je i operátor φ^{-1} diagonalizovatelný. □

Úloha 6.3. Uvažujme reálnou matici $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Spočítejte všechna vlastní čísla a všechny vlastní vektory matic A a A^4 a rozhodněte, zda jsou matice diagonalizovatelné.

Řešení. Nejprve určíme charakteristický polynom matice A:

$$\det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 2 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - 4\lambda - 5) = -\lambda(\lambda - 5)(\lambda + 1),$$

tedy vidíme, že vlastní čísla jsou právě $\lambda \in \{0, -1, 5\}$. Jelikož jsou různá, je matice diagonalizovatelná.

Opět ale vše můžeme spočítat i konkrétně. Vlastní vektory nalezneme řešením homogenních soustav rovnic s maticemi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A + 1 \cdot I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, A - 5 \cdot I_3 = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Spočítáme tak množinu všech vlastních vektorů

$$M = \mathrm{LO}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right\} \cup \mathrm{LO}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \cup \mathrm{LO}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Vidíme, že z vlastních vektorů sestavíme bázi, tedy je matice A diagonalizovatelná.

Protože $A^4\,\mathbf{v} = \lambda^4\,\mathbf{v}$ pro každé vlastní číslo λ a jemu příslušný vlastní vektor $\mathbf{v}$, jsou $\{0, 1, 625\}$ všechna vlastní čísla matice A^4. Protože jsou vlastní čísla tři různá, jedná se o diagonalizovatelnou matici (nebo konkrétněji opět nahlédneme, že množina vlastních vektorů zůstává stejná jako u matice A, tedy M, a sestavíme z nich bázi).

Úloha 6.4. Ověřte, že je matice A diagonalizovatelná, najděte regulární matici P, pro kterou je $P^{-1}AP$ diagonální a spočítejte matice $P^{-1}AP$, a A^{1001}.

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ matice nad tělesem $\mathbb{Z}_3$,

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ matice nad tělesem $\mathbb{Z}_5$.

Řešení. (a) Nejprve buď pomocí charakteristického polynomu $\det(A - \lambda I_3)$ nebo přímým dosazením za λ do parametrické matice $A - \lambda I_3$ najdeme vlastní čísla matice A, jimiž jsou hodnoty 1 a 2 a zároveň spočítáme vlastní vektory jako jádra matic $A - 1I_3$ a $A - 2I_3$:

$$M_1 = \mathrm{Ker}\, A - 1I_3 = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{LO}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$M_2 = \mathrm{Ker}\, A - 2I_3 = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{LO}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

Vidíme, že z množiny vlastních vektorů lze vybrat bázi, například $B = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, proto je matice A diagonalizovatelná a platí $[f_A]_B^B = D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Platí

$$D = [f_A]_B^B = [\mathrm{id}]_B^{K_3}[f_A]_{K_3}^{K_3}[\mathrm{id}]_{K_3}^B = ([\mathrm{id}]_{K_3}^B)^{-1}A[\mathrm{id}]_{K_3}^B,$$

takže hledanou regulární matici P dostaneme jako matici přechodu od báze B složené z vlastních vektorů ke kanonické bázi:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{přičemž máme} \quad D = P^{-1}AP.$$

Uvědomíme-li si, že $A^n = PD^nP^{-1}$ a že v tělese $\mathbb{Z}_3$ platí $2^{2k} = 1$ a $2^{2k+1} = 2$ pro každé přirozené k, dostáváme, že $A^{1001} = P \begin{pmatrix} 1^{1001} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{1001} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{1001} \end{pmatrix} P^{-1} = PDP^{-1} = A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Nejprve najdeme vlastní čísla matice, například tak, že spočítáme charakteristický polynom matice A:

$$\det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 & 1 \\ 3 & -\lambda & 3 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda) \det \begin{pmatrix} -\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} - 3 \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 1) + (2-\lambda) = (2-\lambda)(\lambda-1)\lambda.$$

tedy vidíme, že máme tři různá vlastní čísla $\lambda \in \{0, 1, 2\}$. Dále řešíme homogenní soustavy rovnic s maticemi

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A - 1I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Dostáváme množinu všech vlastních vektorů $M = \mathrm{LO}\left\{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \cup \mathrm{LO}\left\{\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \cup \mathrm{LO}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, z níž snadno vybereme bázi $B = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. To znamená, že je matice A diagonalizovatelná. Hledaná matice P je maticí přechodu od báze B ke kanonické bázi, tedy

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{a proto máme} \quad D := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = P^{-1}AP.$$

Konečně protože $A^n = PD^nP^{-1}$ a navíc $2^4 = 1$, a proto $2^{1001} = (2^4)^{250} \cdot 2 = 2$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$, dostáváme, že

$$A^{1001} = P \begin{pmatrix} 0^{1001} & 0 & 0 \\ 0 & 1^{1001} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{1001} \end{pmatrix} P^{-1} = PDP^{-1} = A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Další základní příklady k počítání:

Úloha 6.5. Najděte všechna vlastní čísla a všechny vlastní vektory rozhodněte, zda jsou diagonalizovatelné reálné matice

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, \text{(b)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{(c)} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \text{(d)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení: (a) vlastní čísla: $3, 4$, vlastní vektory: $\mathrm{LO}((-1,5)^T) \cup \mathrm{LO}((0,1)^T)$, je diagonalizovatelná,

(b) vlastní čísla: $1, 2$, vlastní vektory: $\mathrm{LO}((1,1)^T) \cup \mathrm{LO}((1,2)^T)$, je diagonalizovatelná

(c) vlastní číslo: 2, vlastní vektory: $\mathrm{LO}((1,1)^T)$, není diagonalizovatelná,

(d) vlastní čísla: $1, 4$, vlastní vektory: $\mathrm{LO}((1,-1,0)^T, (1,1,-2)^T) \cup \mathrm{LO}((1,1,1)^T)$.

Úloha 6.6. Operátor f na $\mathbb{Z}_7^2$ splňuje $f((2,1)^T) = (0,5)^T, \quad f((1,1)^T) = (6,2)^T$. Určete jeho charakteristický polynom a vlastní čísla a rozhodněte, zda je diagonalizovatelný.

Řešení: $\lambda^2 + 5 = (\lambda - 3)(\lambda - 4)$, vlastní čísla: $3, 4$, operátor je diagonalizovatelný.

Úloha 6.7. Matice lineárního operátoru f na prostoru $\mathbb{Z}_5^2$ vzhledem k bázi $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ je $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$. Zjistěte, zda je f diagonalizovatelný. Pokud ano, najděte bázi C takovou, že $[f]_C^C$ je diagonální, a určete $[f]_C^C$. Kolik bází C, pro něž je $[f]_C^C$ diagonální existuje?

Řešení: například pro $C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ je $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, různých bází C je 32.