Cvičení k přednášce NMAG112 Lineární algebra 2

Řešení
Verze ze dne 11. března 2022

4 Gramova matice, aplikace skalárního součinu

Cíle cvičení:

- Procvičit hledání ortogonální projekce pomocí Gramovy matice,
- naučit se počítat s ortogonální projekcí jako s lineárním zobrazením,
- počítat přibližná řešení metodou nejmenších čtverců.

Řešené příklady:

Úloha 4.1. Uvažujme standardní skalární součin na reálném vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$. Bez použití Gramovy-Schmidtovy ortogonalizace spočtěte ortogonální projekci $\mathbf{u}$ vektoru $\mathbf{v}$ na podprostor U pokud

(a) $U = \mathrm{LO}\{(1,3,-2)^T, (1,1,-1)^T\}$ a $\mathbf{v} = (2,4,3)^T$,

(b) $U = \mathrm{LO}\{(1,3,-2)^T, (1,1,-1)^T\}$ a $\mathbf{v} = (1,2,0)^T$,

Řešení. (a) Hledáme lineární kombinaci $\mathbf{u} = a(1,3,-2)^T + b(1,1,-1)^T$ bázových vektorů podprostoru U takovou, že $\mathbf{u} - \mathbf{v} \in U^\perp$. To nastane právě když bude vektor $\mathbf{u} - \mathbf{v} = a(1,3,-2)^T + b(1,1,-1)^T - (2,4,3)^T$ kolmý na $(1,3,-2)^T$ i $(1,1,-1)^T$, tedy bude-li zároveň platit, že

$$(1,3,-2)\cdot\left(a(1,3,-2)^T + b(1,1,-1)^T - (2,4,3)^T\right) = 0,$$
$$(1,1,-1)\cdot\left(a(1,3,-2)^T + b(1,1,-1)^T - (2,4,3)^T\right) = 0.$$

Výslednou soustavu zapíšeme pomocí Gramovy matice:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 14 & 6 & 8 \\ 6 & 3 & 3 \end{array}\right),$$

Řešením této soustavy dostaneme, že $a = 1$ a $b = -1$. Dosazením spočítáme ortogonální projekci $\mathbf{u} = (1,3,-2)^T - (1,1,-1)^T = (0,2,-1)^T$.

(b) K výpočtu použijeme Gramovu matici se stejnou levou stranou jako v (a):

$$\left(\begin{array}{cc|c} 14 & 6 & 7 \\ 6 & 3 & 3 \end{array}\right),$$

Dostaneme řešení $a = \frac{1}{2}$ a $b = 0$ a dosazením ortogonální projekci $\mathbf{u} = \frac{1}{2}(1,3,-2)^T = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -1)^T$. □

Úloha 4.2. Nechť $U = \mathrm{LO}\left\{(1,1,0,1)^T, (0,1,1,-1)^T\right\}$ je podprostor reálného vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem.

(a) Najděte ortonormální bázi prostoru $U^\perp$.

(b) Najděte ortonormální bázi $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_4)$ prostoru $\mathbb{R}^4$ takovou, že $U = \mathrm{LO}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.

(c) Pro podprostor W prostoru $\mathbb{R}^4$ označme $P_W \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ lineární operátor na $\mathbb{R}^4$ odpovídající ortogonální projekci na W. Určete matice $[P_U]^B_B$ a $[P_{U^\perp}]^B_B$.

(d) Označme K kanonickou bázi prostoru $\mathbb{R}^4$. Určete matice $[P_U]_K^K$ a $[P_{U^\perp}]_K^K$.

Řešení. (a) Nejprve najdeme řešením homogenní soustavy s maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

nenulový vektor z U^T. Dostaneme například vektor $\mathbf{u}_1 = (-1, 0, 1, 1)^T$. Dále řešením homogenní soustavy

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

spočteme vektor $\mathbf{u}_2 = (1, -1, 1, 0)^T$ kolmý na U a $\mathbf{u}_1$. Vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ normalizujeme a tak dostaneme ortonormální bázi $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 0, 1, 1)^T, \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1, 0)^T\right)$ ortogonálního doplňku $U^\perp$ podprostoru U. (Mohli jsme také nejprve najít ortogonální doplněk $U^\perp$ a pak v něm sestrojit ortonormální bázi pomocí Gramova-Schmidtova algoritmu. Výše uvedený postup je ale přímočařejší a dává přímo ortogonální bázi $U^\perp$, jejíž vektory pak stačí normalizovat.)

(b) Všimněme si, že vektory $(1, 1, 0, 1)^T$ a $(0, 1, 1, -1)^T$, tvořící bázi prostoru U, jsou na sebe kolmé. Stačí je tedy normalizovat a přidat ortonormální bázi prostoru $U^\perp$ spočtenou v bodě (a). Dostaneme, že $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 0, 1)^T$, $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(0, 1, 1, -1)^T$, $\mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 0, 1, 1)^T$ a $\mathbf{v}_4 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1, 0)^T$.

(c) Protože vektory $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$ leží v U, platí, že $P_U(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1$ a $P_U(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_2$. Protože jsou vektory $\mathbf{v}_3$ a $\mathbf{v}_4$ na U kolmé, je $P_U(\mathbf{v}_3) = P_U(\mathbf{v}_4) = 0$. Podobně nahlédneme, že $P_{U^\perp}(\mathbf{v}_1) = P_{U^\perp}(\mathbf{v}_2) = 0$, $P_{U^\perp}(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_3$ a $P_{U^\perp}(\mathbf{v}_4) = \mathbf{v}_4$. Odtud dostaneme, že

$$[P_U]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad [P_{U^\perp}]_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(d) Využijeme vztahu $[P_U]_K^K = [\mathrm{id}]_K^B \, [P_U]_B^B \, [\mathrm{id}]_B^K$. Sloupce matice $[\mathrm{id}]_K^B$ jsou tvořeny souřadnicemi vektorů $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_4$ vzhledem ke kanonické bázi K. Proto je

$$[\mathrm{id}]_K^B = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dále využijeme vztahu $[\mathrm{id}]_B^K = ([\mathrm{id}]_K^B)^{-1}$ a protože je B ortonormální báze, platí navíc rovnost $([\mathrm{id}]_K^B)^{-1} = ([\mathrm{id}]_K^B)^T$. Celkem tak dostaneme, že

$$[\mathrm{id}]_B^K = ([\mathrm{id}]_K^B)^T = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Po dosazení spočítáme, že

$$[P_U]_K^K = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Matici $[P_{U^\perp}]^K_K$ můžeme spočítat obdobně. Všimněme si ale, že $P_U + P_{U^\perp} = \mathrm{id}$. Odtud plyne, že

$$[P_{U^\perp}]^K_K = [\mathrm{id}]^K_K - [P_U]^K_K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Úloha 4.3. Určete matici ortogonální projekce prostoru $\mathbb{R}^2$ na přímku $\mathrm{LO}\{(2,1)^T\}$ vzhledem ke kanonickým bázím.

Řešení (varianta 1)**.** Označme K kanonickou bázi prostoru $\mathbb{R}^2$ a L danou přímku. Sloupce matice $[P_L]^K_K$ jsou tvořeny souřadnicemi ortogonálních projekcí vektorů kanonické báze na přímku L. Ty určíme jako ve Cvičení 4.1: Hledáme skaláry a, b takové, že $P_U((1,0)^T) = a(2,1)^T$ a $P_U((0,1)^T) = b(2,1)^T$. Určíme je ze vztahů

$$\begin{aligned} (2,1)\cdot\big((1,0)^T - a(2,1)^T\big) &= 0 \\ (2,1)\cdot\big((0,1)^T - b(2,1)^T\big) &= 0. \end{aligned}$$

Spočteme, že $a = \frac{2}{5}$ a $b = \frac{1}{5}$, odkud dostaneme řešení

$$[P_U]^K_K = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Řešení (varianta 2)**.** Najdeme ortonormální bázi $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ prostoru $\mathbb{R}^2$ takovou, že $\mathbf{u}_1$ leží na přímce L. Snadno určíme, že (například) $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)^T$ a $\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2)^T$. Podobně jako ve Cvičení 4.2 nahlédneme, že

$$[P_L]^B_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [\mathrm{id}]^B_K = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad [\mathrm{id}]^K_B = ([\mathrm{id}]^B_K)^{-1} = ([\mathrm{id}]^B_K)^T = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nakonec dosadíme do vztahu $[P_L]^K_K = [\mathrm{id}]^B_K\,[P_L]^B_B\,[\mathrm{id}]^K_B$. □

Úloha 4.4. Metodou nejmenších čtverců najděte přibližné řešení soustavy lineárních rovnic $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$ nad $\mathbb{R}$, jestliže

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad (b) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Řešení. V obou případech snadno spočteme, že vektor $\mathbf{v}$ nenáleží do podprostoru $\mathrm{Im}\,A$ generovaného sloupcovými vektory matice A, a proto nemá ani jedna ze soustav řešení. Budeme hledat vektor $\mathbf{u} \in \mathrm{Im}\,A$ tak, aby norma $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|$ byla nejmenší. To bude právě když $\mathbf{u}-\mathbf{v} \in (\mathrm{Im}\,A)^\perp$. Podprostor $\mathrm{Im}\,A$ je tvořen právě násobky $A\hat{\mathbf{x}}$. Dostáváme tak soustavu $A^T(A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{v}) = 0$, ekvivalentně $A^TA\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{v}$ (tj., *soustavu normálních rovnic* příslušnou k původní soustavě $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$). Vektor $\mathbf{u}$ dostaneme jako $\mathbf{u} = A\hat{\mathbf{x}}$. V případě (a) je

$$A^T(A \mid \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 6 & 3 & 9 \\ 3 & 6 & 0 \end{array}\right),$$

odkud spočítáme, že $\hat{\mathbf{x}} = (2,-1)^T$ a $\mathbf{u} = 2(1,2,1)^T - (2,1,-1)^T = (0,3,3)^T$.

(b) V tomto případě máme

$$A^T(A \mid \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 7 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \end{array}\right),$$

odkud $\hat{\mathbf{x}} = (-1, 2)^T$ a $\mathbf{u} = -(1, 2, 1, -1)^T + 2(1, 1, 0, 1)^T = (1, 0, -1, 3)^T$. □

Další základní příklady k počítání:

Úloha 4.5. V prostoru $\mathbb{R}^3$ uvažujme skalární součin

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^T \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{v}\,.$$

Pro vektory $\mathbf{u}_1 = (1, 0, -1)^T$ a $\mathbf{u}_2 = (0, 2, 1)^T$ určete

(a) ortogonální projekci vektoru $\mathbf{u}_2$ na lineární obal vektoru $\mathbf{u}_1$,

(b) Gramovu matici posloupnosti $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$,

(c) ortogonální projekci vektoru $(1, 0, 0)^T$ na podprostor $\mathrm{LO}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$.

Řešení: (a) $\frac{1}{4}(1, 0, -1)^T$, (b) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}$, (c) $\frac{3}{43}(9, 14, -2)^T$.

Úloha 4.6. Rozhodněte, zda je vektor $\hat{\mathbf{x}} = (2, -1, 1)^T$ řešením soustavy

$$(A \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

metodou nejmenších čtverců. Zdůvodněte.

Řešení: Ano. Vektor $A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}$ je kolmý na sloupce matice A.

Rozšiřující příklady:

Hledání řešení s nejmenší normou u soustav rovnic, které mají nekonečně mnoho řešení, letos na přednášce probráno nebylo. Jde ale opět o přímočarou aplikaci ortogonální projekce, která je vysvětlena ve skriptech v části 8.6.3, a níže jsou související příklady.

Úloha 4.7. Najděte řešení $\mathbf{u}_m$ soustavy lineárních rovnic určené rozšířenou maticí

$$(A \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -1 & 16 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 10 \end{array}\right)$$

s nejmenší normou.

Řešení. Všechna řešení dané soustavy tvoří rovinu $\mathbf{u} + \operatorname{Ker} A$, kde $\mathbf{u}$ je libovolné z nich. Řešení s nejmenší normou musí být na tuto rovinu kolmé a tedy kolmé na rovinu $\operatorname{Ker} A$, která je s rovinou všech řešení rovnoběžná. Proto je vektor $\mathbf{u}_m$ lineární kombinací řádků matice A, a tedy tvaru $A^T\mathbf{x}$. Musí platit, že $AA^T\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Spočteme

$$AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Řešením soustavy s rozšířenou maticí

$$\left(\begin{array}{cc|c} 10 & 6 & 16 \\ 6 & 4 & 10 \end{array}\right)$$

dostaneme, že $\mathbf{x} = (1,1)^T$, odkud $\mathbf{u}_m = (2,3,3,-2)^T$. □

Úloha 4.8. Je některý z vektorů $(4,4,2,1)^T$, $(4,3,3,0)^T$ řešením soustavy rovnic

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 14 \end{array}\right)$$

s nejmenší normou? Zdůvodněte.

Řešení: Oba vektory jsou řešením dané soustavy. Vektor $(4,3,3,0)^T$ je řešením s nejmenší normou neboť je lineární kombinací řádků matice levé strany soustavy.

Úloha k zamyšlení:

Úloha 4.9. V Úloze 4.2 jsme nalezli ortonormální bázi $B = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_4)$ prostoru $\mathbb{R}^4$. Čemu se rovná $\mathbf{v}_1\mathbf{v}_1^T + \cdots + \mathbf{v}_4\mathbf{v}_4^T$? Výsledek zobecněte.