Obećanja svode konačne probleme na beskonačne

Kristina Asimi
zajednički rad sa Barto Liborom

Karlov univerzitet, Prag, Češka Republika

Kongres mladih matematičara, Novi Sad, 4.10.2019.

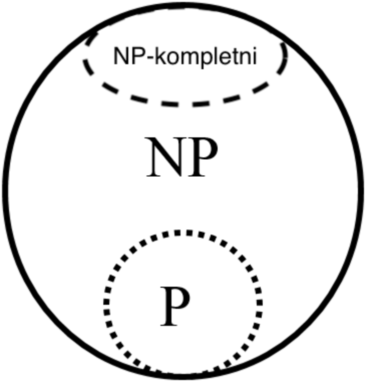
European Research Council
Established by the European Commission

CoCoSym: Symmetry in Computational Complexity

This project has received funding from the European Research Council (ERC) under the European Union's Horizon 2020 research and innovation programme (grant agreement No 771005)

Računska složenost

P - klasa problema koji se mogu rešiti u polinomijalnom vremenu
NP - klasa problema čije se ponuđeno rešenje može proveriti u polinomijalnom vremenu
NP-kompletan problem - NP problem na koji se svaki NP problem može svesti



CSP - Problem zadovoljenja ograničenja

- CSP - Constraint Satisfaction Problem
- problem homomorfizma
  - $$\left.\begin{array}{r} \mathcal{E} = (E; S_1, S_2, \ldots, S_n) \\ \mathcal{D} = (D; R_1, R_2, \ldots, R_n) \end{array}\right\} \text{slične relacione strukture}$$
  - $h : E \to D$ je homomorfizam iz $\mathcal{E}$ u $\mathcal{D}$ ako $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in S_i \Rightarrow (h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_k)) \in R_i$
  - $\mathrm{CSP}(\mathcal{D})$
    - Odlučivanje: Da li za dato $\mathcal{E}$ postoji homomorfizam $\mathcal{E} \to \mathcal{D}$?
    - Traženje: Naći homomorfizam.

CSP - Problem zadovoljenja ograničenja

- CSP - Constraint Satisfaction Problem
- problem homomorfizma
  - $$\left.\begin{array}{r} \mathcal{E} = (E; S_1, S_2, \ldots, S_n) \\ \mathcal{D} = (D; R_1, R_2, \ldots, R_n) \end{array}\right\} \text{slične relacione strukture}$$
  - $h : E \to D$ je homomorfizam iz $\mathcal{E}$ u $\mathcal{D}$ ako $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in S_i \Rightarrow (h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_k)) \in R_i$
  - $\mathrm{CSP}(\mathcal{D})$
    - Odlučivanje: Da li za dato $\mathcal{E}$ postoji homomorfizam $\mathcal{E} \to \mathcal{D}$?
    - Traženje: Naći homomorfizam.

CSP - Problem zadovoljenja ograničenja

- CSP - Constraint Satisfaction Problem
- problem homomorfizma
  - $$\left.\begin{aligned} \mathcal{E} &= (E; S_1, S_2, \ldots, S_n) \\ \mathcal{D} &= (D; R_1, R_2, \ldots, R_n) \end{aligned}\right\} \text{slične relacione strukture}$$
  - $h : E \to D$ je homomorfizam iz $\mathcal{E}$ u $\mathcal{D}$ ako
    $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in S_i \Rightarrow (h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_k)) \in R_i$
  - $\mathrm{CSP}(\mathcal{D})$
    - Odlučivanje: Da li za dato $\mathcal{E}$ postoji homomorfizam $\mathcal{E} \to \mathcal{D}$?
    - Traženje: Naći homomorfizam.

Primeri:

- 3-SAT (NP-kompletan)
- 1-in-3-SAT (NP-kompletan)
  $\text{1-in-3} = (\{0,1\}; \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\})$
- NAE-3-SAT (NP-kompletan)
  $\text{NAE-3} = (\{0,1\}; \{0,1\}^3 \backslash \{(0,0,0),(1,1,1)\})$
- 3-bojenje grafa (NP-kompletan)
  $(\{0,1,2\}; \neq)$
- 2-bojenje grafa (P)
  $(\{0,1\}; \neq)$

Teorema ([Bulatov '17];[Žuk '17])

Za A konačan $\mathrm{CSP}(\mathcal{A})$ je u P ili je NP-kompletan.

Primeri:

- 3-SAT (NP-kompletan)
- 1-in-3-SAT (NP-kompletan)
  $\text{1-in-3} = (\{0,1\}; \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\})$
- NAE-3-SAT (NP-kompletan)
  $\text{NAE-3} = (\{0,1\}; \{0,1\}^3 \setminus \{(0,0,0),(1,1,1)\})$
- 3-bojenje grafa (NP-kompletan)
  $(\{0,1,2\}; \neq)$
- 2-bojenje grafa (P)
  $(\{0,1\}; \neq)$

Teorema ([Bulatov '17];[Žuk '17])

Za $\mathbb{A}$ konačan $\mathrm{CSP}(\mathbb{A})$ je u P ili je NP-kompletan.

Primeri:

- 3-SAT (NP-kompletan)
- 1-in-3-SAT (NP-kompletan)
  $1\text{-in-}3 = (\{0,1\};\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\})$
- NAE-3-SAT (NP-kompletan)
  $\mathrm{NAE}\text{-}3 = (\{0,1\};\{0,1\}^3\backslash\{(0,0,0),(1,1,1)\})$
- 3-bojenje grafa (NP-kompletan)
  $(\{0,1,2\};\neq)$
- 2-bojenje grafa (P)
  $(\{0,1\};\neq)$

Teorema ([Bulatov '17];[Žuk '17])

Za $\mathbb{A}$ *konačan* $\mathrm{CSP}(\mathbb{A})$ *je u* P *ili je* NP*-kompletan.*

Primeri:

- 3-SAT (NP-kompletan)
- 1-in-3-SAT (NP-kompletan)
  $1\text{-in-}3 = (\{0,1\}; \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\})$
- NAE-3-SAT (NP-kompletan)
  $\mathrm{NAE}\text{-}3 = (\{0,1\}; \{0,1\}^3 \backslash \{(0,0,0),(1,1,1)\})$
- 3-bojenje grafa (NP-kompletan)
  $(\{0,1,2\}; \neq)$
- 2-bojenje grafa (P)
  $(\{0,1\}; \neq)$

Teorema ([Bulatov '17];[Žuk '17])

Za A konačan $\mathrm{CSP}(\mathcal{A})$ je u P ili je NP-kompletan.

Primeri:

- 3-SAT (NP-kompletan)
- 1-in-3-SAT (NP-kompletan)
  $1\text{-in-}3 = (\{0,1\}; \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\})$
- NAE-3-SAT (NP-kompletan)
  $\mathrm{NAE}\text{-}3 = (\{0,1\}; \{0,1\}^3 \setminus \{(0,0,0),(1,1,1)\})$
- 3-bojenje grafa (NP-kompletan)
  $(\{0,1,2\}; \neq)$
- 2-bojenje grafa (P)
  $(\{0,1\}; \neq)$

Teorema ([Bulatov '17];[Žuk '17])

Za $\mathbb{A}$ konačan $\mathrm{CSP}(\mathbb{A})$ je u P ili je NP-kompletan.

Primeri:

- 3-SAT (NP-kompletan)
- 1-in-3-SAT (NP-kompletan)
  $\text{1-in-3} = (\{0,1\}; \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\})$
- NAE-3-SAT (NP-kompletan)
  $\text{NAE-3} = (\{0,1\}; \{0,1\}^3 \backslash \{(0,0,0),(1,1,1)\})$
- 3-bojenje grafa (NP-kompletan)
  $(\{0,1,2\}; \neq)$
- 2-bojenje grafa (P)
  $(\{0,1\}; \neq)$

Teorema ([Bulatov '17];[Žuk '17])

Za A konačan $\mathrm{CSP}(\mathcal{A})$ je u P ili je NP-kompletan.

PCSP (Problem zadovoljenja ograničenja sa obećanjem)

- PCSP - Promise Constraint Satisfaction Problem
- $\mathrm{PCSP}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$
- $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ - relacione strukture, $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$
- Traženje: Ako je dato $\mathcal{X}$ takvo da $\mathcal{X} \to \mathcal{A}$, naći $\mathcal{X} \to \mathcal{B}$.
- $\mathrm{PCSP}(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = \mathrm{CSP}(\mathcal{A})$
- $\mathcal{A}' \to \mathcal{B}', \mathcal{A} \to \mathcal{B}$
  $\mathcal{A}' \to \mathcal{A}, \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ - $(\mathcal{A}', \mathcal{B}')$ je homomorfna relaksacija $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$
  $\mathrm{PCSP}(\mathcal{A}', \mathcal{B}') \le \mathrm{PCSP}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$
- primeri:
  - $\mathrm{PCSP}(\text{1-in-3}, \text{NAE-3})$ (P)
  - 5-bojenje 3-obojivog grafa (NP-kompletan)
  - 6-bojenje 3-obojivog grafa

PCSP (Problem zadovoljenja ograničenja sa obećanjem)

- PCSP - Promise Constraint Satisfaction Problem
- $\mathrm{PCSP}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$
- $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ - relacione strukture, $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$
- Traženje: Ako je dato $\mathcal{X}$ takvo da $\mathcal{X} \to \mathcal{A}$, naći $\mathcal{X} \to \mathcal{B}$.
- $\mathrm{PCSP}(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = \mathrm{CSP}(\mathcal{A})$
- $\mathcal{A}' \to \mathcal{B}', \mathcal{A} \to \mathcal{B}$
  $\mathcal{A}' \to \mathcal{A}, \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ - $(\mathcal{A}', \mathcal{B}')$ je homomorfna relaksacija $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$
  $\mathrm{PCSP}(\mathcal{A}', \mathcal{B}') \leq \mathrm{PCSP}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$
- primeri:
  - $\mathrm{PCSP}(\text{1-in-3}, \text{NAE-3})$ (P)
  - 5-bojenje 3-obojivog grafa (NP-kompletan)
  - 6-bojenje 3-obojivog grafa

PCSP (Problem zadovoljenja ograničenja sa obećanjem)

- PCSP - Promise Constraint Satisfaction Problem
- $\mathrm{PCSP}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$
- $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ - relacione strukture, $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$
- Traženje: Ako je dato $\mathcal{X}$ takvo da $\mathcal{X} \to \mathcal{A}$, naći $\mathcal{X} \to \mathcal{B}$.
- $\mathrm{PCSP}(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = \mathrm{CSP}(\mathcal{A})$
- $\mathcal{A}' \to \mathcal{B}', \mathcal{A} \to \mathcal{B}$
  $\mathcal{A}' \to \mathcal{A}, \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ - $(\mathcal{A}', \mathcal{B}')$ je homomorfna relaksacija $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$
  $\mathrm{PCSP}(\mathcal{A}', \mathcal{B}') \leq \mathrm{PCSP}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$
- primeri:
  - $\mathrm{PCSP}(\text{1-in-3}, \text{NAE-3})$ (P)
  - 5-bojenje 3-obojivog grafa (NP-kompletan)
  - 6-bojenje 3-obojivog grafa

PCSP (Problem zadovoljenja ograničenja sa obećanjem)

- PCSP - Promise Constraint Satisfaction Problem
- $\mathrm{PCSP}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$
- $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ - relacione strukture, $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$
- Traženje: Ako je dato $\mathcal{X}$ takvo da $\mathcal{X} \to \mathcal{A}$, naći $\mathcal{X} \to \mathcal{B}$.
- $\mathrm{PCSP}(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = \mathrm{CSP}(\mathcal{A})$
- $\mathcal{A}' \to \mathcal{B}', \mathcal{A} \to \mathcal{B}$
  $\mathcal{A}' \to \mathcal{A}, \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ - $(\mathcal{A}', \mathcal{B}')$ je homomorfna relaksacija $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$
  $\mathrm{PCSP}(\mathcal{A}', \mathcal{B}') \leq \mathrm{PCSP}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$
- primeri:
  - $\mathrm{PCSP}(\text{1-in-3}, \text{NAE-3})$ (P)
  - 5-bojenje 3-obojivog grafa (NP-kompletan)
  - 6-bojenje 3-obojivog grafa

PCSP (Problem zadovoljenja ograničenja sa obećanjem)

- PCSP - Promise Constraint Satisfaction Problem
- $\mathrm{PCSP}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$
- $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ - relacione strukture, $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$
- Traženje: Ako je dato $\mathcal{X}$ takvo da $\mathcal{X} \to \mathcal{A}$, naći $\mathcal{X} \to \mathcal{B}$.
- $\mathrm{PCSP}(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = \mathrm{CSP}(\mathcal{A})$
- $\mathcal{A}' \to \mathcal{B}', \mathcal{A} \to \mathcal{B}$
  $\mathcal{A}' \to \mathcal{A}, \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ - $(\mathcal{A}', \mathcal{B}')$ je homomorfna relaksacija $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$
  $\mathrm{PCSP}(\mathcal{A}', \mathcal{B}') \leq \mathrm{PCSP}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$
- primeri:
  - $\mathrm{PCSP}(1\text{-in-}3, \mathrm{NAE}\text{-}3)$ (P)
  - 5-bojenje 3-obojivog grafa (NP-kompletan)
  - 6-bojenje 3-obojivog grafa

PCSP (Problem zadovoljenja ograničenja sa obećanjem)

- PCSP - Promise Constraint Satisfaction Problem
- $\mathrm{PCSP}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$
- $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ - relacione strukture, $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$
- Traženje: Ako je dato $\mathcal{X}$ takvo da $\mathcal{X} \to \mathcal{A}$, naći $\mathcal{X} \to \mathcal{B}$.
- $\mathrm{PCSP}(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = \mathrm{CSP}(\mathcal{A})$
- $\mathcal{A}' \to \mathcal{B}', \mathcal{A} \to \mathcal{B}$
  $\mathcal{A}' \to \mathcal{A}, \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ - $(\mathcal{A}', \mathcal{B}')$ je homomorfna relaksacija $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$
  $\mathrm{PCSP}(\mathcal{A}', \mathcal{B}') \leq \mathrm{PCSP}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$
- primeri:
  - $\mathrm{PCSP}(1\text{-in-}3, \mathrm{NAE}\text{-}3)$ (P)
  - 5-bojenje 3-obojivog grafa (NP-kompletan)
  - 6-bojenje 3-obojivog grafa

PCSP dihotomija?

- Da li postoji dihotomija za PCSP?
- Da za simetrične PCSP probleme nad domenom $\{0,1\}$ (koji dozvoljavaju negacije)
- $\mathrm{PCSP}(\Gamma)$, Γ - kolekcija parova relacija
- Γ dozvoljava negacije: $(\neq,\neq) \in \Gamma$ gde je $\neq = \{(0,1),(1,0)\}$

Teorema (Brakensiek, Guruswami '17)

Neka je Γ kolekcija parova simetričnih relacija nad $\{0,1\}$ koja dozvoljava negacije. Tada je $\mathrm{PCSP}(\Gamma)$ u P ili NP-kompletan.

Teorema (Ficak, Kozik, Olšak, Stankiewicz '19)

Neka je Γ kolekcija parova simetričnih relacija nad $\{0,1\}$. Tada je $\mathrm{PCSP}(\Gamma)$ u P ili NP-kompletan.

PCSP dihotomija?

- Da li postoji dihotomija za PCSP?
- Da za simetrične PCSP probleme nad domenom $\{0, 1\}$ (koji dozvoljavaju negacije)
- $\mathrm{PCSP}(\Gamma)$, Γ - kolekcija parova relacija
- Γ dozvoljava negacije: $(\neq, \neq) \in \Gamma$ gde je $\neq = \{(0, 1), (1, 0)\}$

Teorema (Brakensiek, Guruswami '17)

Neka je Γ kolekcija parova simetričnih relacija nad $\{0, 1\}$ koja dozvoljava negacije. Tada je $\mathrm{PCSP}(\Gamma)$ u P ili NP-kompletan.

Teorema (Ficak, Kozik, Olšak, Stankiewicz '19)

Neka je Γ kolekcija parova simetričnih relacija nad $\{0, 1\}$. Tada je $\mathrm{PCSP}(\Gamma)$ u P ili NP-kompletan.

PCSP dihotomija?

- Da li postoji dihotomija za PCSP?
- Da za simetrične PCSP probleme nad domenom $\{0,1\}$ (koji dozvoljavaju negacije)
- $\mathrm{PCSP}(\Gamma)$, Γ - kolekcija parova relacija
- Γ dozvoljava negacije: $(\neq, \neq) \in \Gamma$ gde je $\neq = \{(0,1),(1,0)\}$

Teorema (Brakensiek, Guruswami '17)

Neka je Γ kolekcija parova simetričnih relacija nad $\{0,1\}$ koja dozvoljava negacije. Tada je $\mathrm{PCSP}(\Gamma)$ u P ili NP-kompletan.

Teorema (Ficak, Kozik, Olšak, Stankiewicz '19)

Neka je Γ kolekcija parova simetričnih relacija nad $\{0,1\}$. Tada je $\mathrm{PCSP}(\Gamma)$ u P ili NP-kompletan.

PCSP dihotomija?

- Da li postoji dihotomija za PCSP?
- Da za simetrične PCSP probleme nad domenom $\{0, 1\}$ (koji dozvoljavaju negacije)
- $\mathrm{PCSP}(\Gamma)$, Γ - kolekcija parova relacija
- Γ dozvoljava negacije: $(\neq, \neq) \in \Gamma$ gde je $\neq = \{(0, 1), (1, 0)\}$

Teorema (Brakensiek, Guruswami '17)

Neka je Γ kolekcija parova simetričnih relacija nad $\{0, 1\}$ koja dozvoljava negacije. Tada je $\mathrm{PCSP}(\Gamma)$ u P ili NP-kompletan.

Teorema (Ficak, Kozik, Olšak, Stankiewicz '19)

Neka je Γ kolekcija parova simetričnih relacija nad $\{0, 1\}$. Tada je $\mathrm{PCSP}(\Gamma)$ u P ili NP-kompletan.

PCSP dihotomija?

- Da li postoji dihotomija za PCSP?
- Da za simetrične PCSP probleme nad domenom $\{0, 1\}$ (koji dozvoljavaju negacije)
- $\mathrm{PCSP}(\Gamma)$, Γ - kolekcija parova relacija
- Γ dozvoljava negacije: $(\neq, \neq) \in \Gamma$ gde je $\neq = \{(0, 1), (1, 0)\}$

Teorema (Brakensiek, Guruswami '17)

Neka je Γ kolekcija parova simetričnih relacija nad $\{0, 1\}$ koja dozvoljava negacije. Tada je $\mathrm{PCSP}(\Gamma)$ u P ili NP-kompletan.

Teorema (Ficak, Kozik, Olšak, Stankiewicz '19)

Neka je Γ kolekcija parova simetričnih relacija nad $\{0, 1\}$. Tada je $\mathrm{PCSP}(\Gamma)$ u P ili NP-kompletan.

PCSP dihotomija?

- Da li postoji dihotomija za PCSP?
- Da za simetrične PCSP probleme nad domenom $\{0, 1\}$ (koji dozvoljavaju negacije)
- $\mathrm{PCSP}(\Gamma)$, Γ - kolekcija parova relacija
- Γ dozvoljava negacije: $(\neq, \neq) \in \Gamma$ gde je $\neq = \{(0, 1), (1, 0)\}$

Teorema (Brakensiek, Guruswami '17)

Neka je Γ kolekcija parova simetričnih relacija nad $\{0, 1\}$ koja dozvoljava negacije. Tada je $\mathrm{PCSP}(\Gamma)$ u P ili NP-kompletan.

Teorema (Ficak, Kozik, Olšak, Stankiewicz '19)

Neka je Γ kolekcija parova simetričnih relacija nad $\{0, 1\}$. Tada je $\mathrm{PCSP}(\Gamma)$ u P ili NP-kompletan.

Klasifikacija

odd-in-k $= \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) : \Sigma x_i = 1 \pmod 2\}$
even-in-k $= \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) : \Sigma x_i = 0 \pmod 2\}$
$\leq$ j-in-k $= \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) : \Sigma x_i \leq j\}$
j-in-k $= \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) : \Sigma x_i = j\}$
NAE-k $= \{0,1\}^k \setminus \{(0,0,\ldots,0),(1,1,\ldots,1)\}$

Teorema (Brakensiek, Guruswami '17)

$\Gamma = \{(\mathrm{P},\mathrm{Q}), (\neq, \neq)\}$. *Ako* $(\mathrm{P},\mathrm{Q}) =$
a) $(\text{odd-in-k}, \text{odd-in-k})$, $(\text{even-in-k}, \text{even-in-k})$
b) $(\leq \text{j-in-k}, \leq \text{(2j-1)-in-k})$, $j < \frac{k}{2}$
c) $(\text{j-in-k}, \text{NAE-k})$
tada je $\mathrm{PCSP}(\Gamma)$ *u P.*

Svi slučaji rešivi u polinomijalnom vremenu: relaksacije i modifikacije gornjih slučajeva

Klasifikacija

$$\text{odd-in-k} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) : \Sigma x_i = 1 \pmod 2\}$$
$$\text{even-in-k} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) : \Sigma x_i = 0 \pmod 2\}$$
$$\leq \text{j-in-k} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) : \Sigma x_i \leq j\}$$
$$\text{j-in-k} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) : \Sigma x_i = j\}$$
$$\text{NAE-k} = \{0,1\}^k \backslash \{(0,0,\ldots,0),(1,1,\ldots,1)\}$$

Teorema (Brakensiek, Guruswami '17)

$\Gamma = \{(\mathrm{P}, \mathrm{Q}), (\neq, \neq)\}$. *Ako* $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) =$
a) $(\text{odd-in-k}, \text{odd-in-k})$*,* $(\text{even-in-k}, \text{even-in-k})$
b) $(\leq \text{j-in-k}, \leq \text{(2j-1)-in-k})$*,* $j < \frac{k}{2}$
c) $(\text{j-in-k}, \text{NAE-k})$
tada je $\mathrm{PCSP}(\Gamma)$ *u P.*

Svi slučaji rešivi u polinomijalnom vremenu: relaksacije i modifikacije gornjih slučajeva

Klasifikacija

$$\text{odd-in-k} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) : \Sigma x_i = 1 \pmod 2\}$$
$$\text{even-in-k} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) : \Sigma x_i = 0 \pmod 2\}$$
$$\leq \text{j-in-k} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) : \Sigma x_i \leq j\}$$
$$\text{j-in-k} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) : \Sigma x_i = j\}$$
$$\text{NAE-k} = \{0,1\}^k \setminus \{(0,0,\ldots,0),(1,1,\ldots,1)\}$$

Teorema (Brakensiek, Guruswami '17)

$\Gamma = \{(\mathrm{P},\mathrm{Q}),(\neq,\neq)\}$. *Ako* $(\mathrm{P},\mathrm{Q}) =$
a) $(\text{odd-in-k}, \text{odd-in-k})$*,* $(\text{even-in-k}, \text{even-in-k})$
b) $(\leq \text{j-in-k}$*,* $\leq \text{(2j-1)-in-k})$*,* $j < \frac{k}{2}$
c) $(\text{j-in-k}, \text{NAE-k})$
tada je $\mathrm{PCSP}(\Gamma)$ *u P.*

Svi slučaji rešivi u polinomijalnom vremenu: relaksacije i modifikacije gornjih slučajeva

PCSP(1-in-3, NAE-3)

- PCSP(1-in-3, NAE-3) je u P
- $\mathcal{Z} := (\mathbb{Z}; \{(x, y, z) : x + y + z = 1\})$
- Pronalaženje rešenja sistema linearnih jednačina nad $\mathbb{Z}$ je u P. [Grötschel, Lovász, Schrijver '93]
- $\mathrm{CSP}(\mathcal{Z})$ je u P
- $\text{1-in-3} \to \mathcal{Z}$
  $\mathcal{Z} \to \text{NAE-3}$
- $\mathrm{PCSP}(\text{1-in-3}, \text{NAE-3}) \leq \mathrm{PCSP}(\mathcal{Z}, \mathcal{Z}) = \mathrm{CSP}(\mathcal{Z})$

Teorema (Barto)

Neka je $\mathcal{C}$ konačna relaciona struktura takva da je (1-in-3, NAE-3) homomorfna relaksacija $(\mathcal{C}, \mathcal{C})$. Tada je $\mathrm{CSP}(\mathcal{C})$ NP-kompletan.

$\mathrm{PCSP}(1\text{-in-}3, \mathrm{NAE}\text{-}3)$

- $\mathrm{PCSP}(1\text{-in-}3, \mathrm{NAE}\text{-}3)$ je u P
- $\mathcal{Z} := (\mathbb{Z}; \{(x, y, z) : x + y + z = 1\})$
- Pronalaženje rešenja sistema linearnih jednačina nad $\mathbb{Z}$ je u P.
  [Grötschel, Lovász, Schrijver '93]
- $\mathrm{CSP}(\mathcal{Z})$ je u P
- $1\text{-in-}3 \to \mathcal{Z}$
  $\mathcal{Z} \to \mathrm{NAE}\text{-}3$
- $\mathrm{PCSP}(1\text{-in-}3, \mathrm{NAE}\text{-}3) \leq \mathrm{PCSP}(\mathcal{Z}, \mathcal{Z}) = \mathrm{CSP}(\mathcal{Z})$

Teorema (Barto)

Neka je $\mathcal{C}$ konačna relaciona struktura takva da je $(1\text{-in-}3, \mathrm{NAE}\text{-}3)$ homomorfna relaksacija $(\mathcal{C}, \mathcal{C})$. Tada je $\mathrm{CSP}(\mathcal{C})$ NP-kompletan.

$\mathrm{PCSP}(\text{1-in-3}, \text{NAE-3})$

- $\mathrm{PCSP}(\text{1-in-3}, \text{NAE-3})$ je u P
- $\mathcal{Z} := (\mathbb{Z}; \{(x,y,z) : x+y+z=1\})$
- Pronalaženje rešenja sistema linearnih jednačina nad $\mathbb{Z}$ je u P.
  [Grötschel, Lovász, Schrijver '93]
- $\mathrm{CSP}(\mathcal{Z})$ je u P
- $\text{1-in-3} \to \mathcal{Z}$
  $\mathcal{Z} \to \text{NAE-3}$
- $\mathrm{PCSP}(\text{1-in-3}, \text{NAE-3}) \leq \mathrm{PCSP}(\mathcal{Z}, \mathcal{Z}) = \mathrm{CSP}(\mathcal{Z})$

Teorema (Barto)

Neka je $\mathcal{C}$ konačna relaciona struktura takva da je $(\text{1-in-3}, \text{NAE-3})$ homomorfna relaksacija $(\mathcal{C}, \mathcal{C})$. Tada je $\mathrm{CSP}(\mathcal{C})$ NP-kompletan.

$\mathrm{PCSP}(\text{1-in-3}, \text{NAE-3})$

- $\mathrm{PCSP}(\text{1-in-3}, \text{NAE-3})$ je u P
- $\mathcal{Z} := (\mathbb{Z}; \{(x, y, z) : x + y + z = 1\})$
- Pronalaženje rešenja sistema linearnih jednačina nad $\mathbb{Z}$ je u P.
  [Grötschel, Lovász, Schrijver '93]
- $\mathrm{CSP}(\mathcal{Z})$ je u P
- $\text{1-in-3} \to \mathcal{Z}$
  $\mathcal{Z} \to \text{NAE-3}$
- $\mathrm{PCSP}(\text{1-in-3}, \text{NAE-3}) \leq \mathrm{PCSP}(\mathcal{Z}, \mathcal{Z}) = \mathrm{CSP}(\mathcal{Z})$

Teorema (Barto)

Neka je $\mathcal{C}$ konačna relaciona struktura takva da je $(\text{1-in-3}, \text{NAE-3})$ homomorfna relaksacija $(\mathcal{C}, \mathcal{C})$. Tada je $\mathrm{CSP}(\mathcal{C})$ NP-kompletan.

- $\mathrm{PCSP}(\text{1-in-3}, \text{NAE-3})$ je u P
- $\mathcal{Z} := (\mathbb{Z}; \{(x, y, z) : x + y + z = 1\})$
- Pronalaženje rešenja sistema linearnih jednačina nad $\mathbb{Z}$ je u P.
  [Grötschel, Lovász, Schrijver '93]
- $\mathrm{CSP}(\mathcal{Z})$ je u P
- $\text{1-in-3} \to \mathcal{Z}$
  $\mathcal{Z} \to \text{NAE-3}$
- $\mathrm{PCSP}(\text{1-in-3}, \text{NAE-3}) \leq \mathrm{PCSP}(\mathcal{Z}, \mathcal{Z}) = \mathrm{CSP}(\mathcal{Z})$

Teorema (Barto)

Neka je $\mathcal{C}$ konačna relaciona struktura takva da je $(\text{1-in-3}, \text{NAE-3})$ homomorfna relaksacija $(\mathcal{C}, \mathcal{C})$. Tada je $\mathrm{CSP}(\mathcal{C})$ NP-kompletan.

a) $(\text{odd-in-k}, \text{odd-in-k})$, $(\text{even-in-k}, \text{even-in-k})$ i relaksacije: svodljivi na konačan CSP

b) $(\leq \text{j-in-k}, \leq \text{(2j-1)-in-k})$, $j < \frac{k}{2}$

- $(\leq \text{2-in-k}, \leq \text{3-in-k})$, $k \geq 5$: infinitarni
- $(\text{2-in-k}, \leq \text{3-in-k})$, $k \geq 5$: infinitarni
- preostali slučaji: nerešeni

c) $(\text{j-in-k}, \text{NAE-k})$

- $(\text{1-in-3}, \text{NAE-3})$: infinitaran
  $(\text{1-in-k}, \text{NAE-k})$, k - neparan: verovatno infinitarni
- $(\text{1-in-k}, \text{NAE-k})$, k - paran: svodljivi na konačan CSP
- preostali slučaji: nerešeni

Infinitarnost

a) $(\text{odd-in-k}, \text{odd-in-k})$, $(\text{even-in-k}, \text{even-in-k})$ i relaksacije: svodljivi na konačan CSP

b) $(\leq \text{j-in-k}, \leq \text{(2j-1)-in-k})$, $j < \frac{k}{2}$

- $(\leq \text{2-in-k}, \leq \text{3-in-k})$, $k \geq 5$: infinitarni
- $(\text{2-in-k}, \leq \text{3-in-k})$, $k \geq 5$: infinitarni
- preostali slučaji: nerešeni

c) $(\text{j-in-k}, \text{NAE-k})$

- $(\text{1-in-3}, \text{NAE-3})$: infinitaran
  $(\text{1-in-k}, \text{NAE-k})$, k - neparan: verovatno infinitarni
- $(\text{1-in-k}, \text{NAE-k})$, k - paran: svodljivi na konačan CSP
- preostali slučaji: nerešeni

Infinitarnost

a) $(\text{odd-in-k}, \text{odd-in-k})$, $(\text{even-in-k}, \text{even-in-k})$ i relaksacije: svodljivi na konačan CSP

b) $(\leq \text{j-in-k}, \leq \text{(2j-1)-in-k})$, $j < \frac{k}{2}$

- $(\leq \text{2-in-k}, \leq \text{3-in-k})$, $k \geq 5$: infinitarni
- $(\text{2-in-k}, \leq \text{3-in-k})$, $k \geq 5$: infinitarni
- preostali slučaji: nerešeni

c) $(\text{j-in-k}, \text{NAE-k})$

- $(\text{1-in-3}, \text{NAE-3})$: infinitaran
  $(\text{1-in-k}, \text{NAE-k})$, k - neparan: verovatno infinitarni
- $(\text{1-in-k}, \text{NAE-k})$, k - paran: svodljivi na konačan CSP
- preostali slučaji: nerešeni

Hvala na pažnji!