Řešení

73) Řešíme pro $x \in \mathbb{R}$ a $y \in \mathbb{R}$. Použijeme substituci $z = x + 2y$, $z' = 1 + 2y'$. Dostáváme tak rovnici $z' = 1 + 2\cos z$. Stacionární řešení $z = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ a $z = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Pro $z \in (\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \frac{4\pi}{3} + 2k\pi)$ řešíme rovnici $\frac{z'}{1+2\cos z} = 1$, po integraci $\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{argtgh} \frac{\operatorname{tg}\frac{z}{2}}{\sqrt{3}} = x + c$, $c \in \mathbb{R}$. Odtud $z = 2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{tgh}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(x+c)\right)\right) + 2k\pi$, $x \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$. Pro $z \in (\frac{4\pi}{3} + 2k\pi; \frac{2\pi}{3} + 2(k+1)\pi)$ řešíme rovnici $\frac{z'}{1+2\cos z} = 1$, po integraci $\frac{2}{\sqrt{3}}F(z) = x + c$, $c \in \mathbb{R}$, kde

$$F(z) = \begin{cases} \operatorname{argcotg} \frac{\operatorname{tg}\frac{z}{2}}{\sqrt{3}}, & z \in (\frac{2\pi}{3}; \pi) \cup (\pi; \frac{4\pi}{3}) \\ 0, & z \in \{\pi\} \end{cases}$$

Odtud $z = 2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{cotgh}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(x+c)\right)\right) + 2(k+1)\pi$ pro $x + c \in (-\infty; 0)$, $z(-c) = \pi + 2k\pi$, $z = 2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{cotgh}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(x+c)\right)\right) + 2k\pi$ pro $x + c \in (0; +\infty)$. Po zpětné substituci $y = \frac{z-x}{2}$ dostáváme závěr:

$$y(x) = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{tgh}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(x+c)\right)\right) + k\pi - \frac{x}{2},\ x \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{cotgh}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(x+c)\right)\right) + \pi + k\pi - \frac{x}{2}, & x \in (-\infty; -c) \\ \frac{\pi}{2} + k\pi + \frac{c}{2}, & x \in \{-c\} \\ \operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{cotgh}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(x+c)\right)\right) + k\pi - \frac{x}{2}, & x \in (-c; +\infty) \end{cases}$$

$$y(x) = \frac{\pi}{3} + k\pi - \frac{x}{2},\ x \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = \frac{2\pi}{3} + k\pi - \frac{x}{2},\ x \in \mathbb{R}$$

$c \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$

74) Řešíme pro $x \in \mathbb{R}$ a $y \in \mathbb{R}$. Použijeme substituci $z = x + y + 3$, $z' = 1 + y'$. Dostáváme tak rovnici $z' = \sin z$. Stacionární řešení $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Pro $z \in (k\pi; \pi + k\pi)$ řešíme rovnici $\frac{z'}{\sin z} = 1$. Po integraci $-\operatorname{argtgh}(\cos z) = x + c$, $c \in \mathbb{R}$. Po úpravě $z = k\pi + \arccos(\operatorname{tgh}(-x-c))$, $x \in \mathbb{R}$. Po zpětném dosazení $y = z - x - 3$ dostáváme závěr:

$$y(x) = \arccos(\operatorname{tgh}(-x-c)) + k\pi - x - 3,\ x \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = k\pi - x - 3,\ x \in \mathbb{R}$$

$c \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$

75) Řešíme pro $x \in \mathbb{R}$ a $y \in \mathbb{R}$. Použijeme substituci $z = x + y$, $z' = 1 + y'$. Dostáváme tak po úpravě rovnici $\frac{z'}{1+\sqrt{1+z^2}} = 1$. Po integraci $F(z) = x + c$, kde

$$F(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{z} - \dfrac{\sqrt{1+z^2}}{z} + \operatorname{argsinh} z, & z \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, & z \in \{0\} \end{cases}$$

Protože $F(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, je $c \in \mathbb{R}$ a $x \in \mathbb{R}$. Po přenásobení rovnice z a po zpětném dosazení $z = x + y$ dostáváme závěrečný vztah $(x + y) \operatorname{argsinh}(x + y) - \sqrt{1 + (x + y)^2} - (x + c)(x + y) + 1 = 0$, který určuje řešení pro $x \in \mathbb{R}$ a $c \in \mathbb{R}$.

76) Řešíme pro $x \in \mathbb{R}$ a $y \in \mathbb{R}$. Použijeme substituci $z = y + \cos x$, $z' = y' - \sin x$. Dostáváme tak rovnici $z' = \cos z$. Stacionární řešení $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, pro $x \in \mathbb{R}$. Pro $z \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$ řešíme rovnici $\frac{z'}{\cos z} = 1$. Po integraci $\operatorname{argtgh}(\sin z) = x + c$, $c \in \mathbb{R}$. Odtud $z = \arcsin(\operatorname{tgh}(x + c)) + k\pi$. Po zpětném dosazení do vztahu $y = z - \cos x$ dostáváme závěr:

$$y(x) = \arcsin(\operatorname{tgh}(x + c)) - \cos x + k\pi, x \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = \frac{\pi}{2} - \cos x + k\pi, x \in \mathbb{R}$$

$c \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$