Řešení

67) Řešíme na množině $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; 2x-y+4\neq 0\}$. Substitucí $x=X-1$ a $y=Y+2$ převedeme zadanou rovnici na homogenní rovnici $Y'=\frac{2Y-X}{2X-Y}$ pro $Y\neq 2X$. Použijeme substituci $Y=X\cdot z$ $(z\neq 2)$. Po úpravě přejde rovnice do tvaru $(2-z)Xz'=z^2-1$, která má stacionární řešení $z=\pm 1$. Pro $X\neq 0$ a $z\notin\{-1;1\}$ máme $z'\left(\frac{\frac{1}{2}}{z-1}-\frac{\frac{3}{2}}{z+1}\right)=\frac{1}{X}$. Po integraci a drobné úpravě dostaneme $\ln\left(\left|\frac{z-1}{(z+1)^3}\right|\right)=\ln(X^2)+2c$, $c\in\mathbb{R}$. Pro $z\in(-\infty;-1)$ a pro $z\in(-1;1)$ je $\ln\left(\left|\frac{z-1}{(z+1)^3}\right|\right)\in(-\infty;+\infty)$, tedy $X\in(-\infty;0)$ nebo $X\in(0;+\infty)$, pro $z\in(1;+\infty)\setminus\{2\}$ je $\ln\left(\left|\frac{z-1}{(z+1)^3}\right|\right)\in(-\infty;-\ln 27)$, tedy $X\in(-\frac{1}{27}e^{-2c};0)$ nebo $X\in(0;\frac{1}{27}e^{-2c})$. Označíme-li $e^{2c}=k>0$, dostaneme vztah $k=\frac{|z-1|}{|X^2\cdot(z+1)^3|}=\frac{|Xz-X|}{|(Xz+X)^3|}$. Protože $Xz=Y$, máme $|Y-X|=k|Y+X|^3$. Po zpětné substituci $X=x+1$ a $Y=y-2$ dostaneme závěrečný implicitní vztah $|x-y+3|=k|x+y-1|^3$, $k\in[0;+\infty]$, kde pro případ $k=0$ je $y=x+3$ $(z=1)$ a pro případ $k=+\infty$ je $y=1-x$ $(z=-1)$. Tento vztah určuje řešení pro $x\in(-\infty;-1)$, pro $x\in(-1;+\infty)$, pro $x\in(-1-\frac{1}{27k};0)$ a pro $x\in(0;-1+\frac{1}{27k})$. Ze vztahu $|x-y+3|=k|x+y-1|^3$ můžeme pro $x\to -1$ usoudit, že $y\to 2$ nebo (pro $k>0$) $y\to 2\pm\frac{1}{\sqrt{k}}$. První možnost odporuje podmínce $2x-y+4\neq 0$. Podíváme-li se ale na druhou možnost, pak máme $y'(-1)=\lim\limits_{x\to -1}\frac{2y(x)-x-5}{2x-y(x)+4}=\frac{4\pm 2/\sqrt{k}+1-5}{-2-2\mp 1/\sqrt{k}+4}=-2$, takže řešení definované na intervalu $(-\infty;-1)$, jehož graf leží ve druhém kvadrantu, lze v bodě $x=-1$ napojit s řešením definovaným na intervalu $(-1;-1+\frac{1}{27k})$, a stejně tak řešení definované na intervalu $(-1-\frac{1}{27k};-1)$ lze v bodě $x=-1$ napojit s řešením definovaným na intervalu $(-1;+\infty)$, jehož graf je převážně ve čtvrtém kvadrantu. Získáme tak maximální řešení definovaná na intervalech $(-\infty;-1+\frac{1}{27k})$, $(-1-\frac{1}{27k};+\infty)$, $(-\infty;-1)$, $(-1;+\infty)$, $(-1-\frac{1}{27k};-1)$ a $(-1;-1+\frac{1}{27k})$.

68) Řešíme na množině $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x+y-1\neq 0\}$. Substitucí $x=X+3$ a $y=Y-2$ převedeme zadanou rovnici na homogenní rovnici $Y'=\frac{2Y^2}{(X+Y)^2}$ pro $Y\neq -X$. Použijeme substituci $Y=X\cdot z$ $(z\neq -1)$. Po úpravě přejde rovnice do tvaru $(z+1)^2Xz'=-z(1+z^2)$, která má stacionární řešení $z=0$. Pro $X\neq 0$ a $z\neq 0$ máme $z'\left(\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2+1}\right)=-\frac{1}{X}$. Po integraci dostáváme $\ln|z|+2\operatorname{arctg}|z|=-\ln|x|+c$, $c\in\mathbb{R}$. Pro $z\in(-\infty;0)\setminus\{-1\}$ je $\ln|z|+2\operatorname{arctg}|z|\in(-\infty;+\infty)\setminus\{-\frac{\pi}{2}\}$, tedy $X\in(-\infty;-e^{c+\frac{\pi}{2}})$ nebo $X\in(-e^{c+\frac{\pi}{2}};0)$ nebo $X\in(0;e^{c+\frac{\pi}{2}})$ nebo $\in(e^{c+\frac{\pi}{2}};+\infty)$, pro $z\in(0;+\infty)$ je $\ln|z|+2\operatorname{arctg}|z|\in(-\infty;+\infty)$, tedy $X\in(-\infty;0)$ nebo $X\in(0;+\infty)$. Po zpětném dosazení $z=\frac{Y}{X}$, $X=x-3$, $Y=y+2$ a úpravě dostaneme závěrečný implicitní vztah $\ln|y+2| + 2\operatorname{arctg}(\frac{y+2}{x-3}) = c$, $c \in \mathbb{R}$, který určuje maximální řešení na intervalech $x \in (-\infty; 3)$, $x \in (-\infty; 3 - \exp(\frac{\pi}{2} + c))$, $x \in (3 - \exp(\frac{\pi}{2} + c); 3)$, $x \in (3; 3 + \exp(\frac{\pi}{2} + c))$, $x \in (3 + \exp(\frac{\pi}{2} + c); +\infty)$, $x \in (3; +\infty)$, a dále máme stacionární řešení $y(x) = -2$ pro $x \in (-\infty; 3)$ a pro $x \in (3; +\infty)$. Řešení nejdou nikde napojovat, neboť vyloučené body leží spolu s vyloučenými hodnotami na přímce $x + y - 1 = 0$, na níž není zadaná rovnice definována.

69) Řešíme na množině $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 4x+2y+9 \neq 0\}$. Substitucí $z = 2x+y$ ($z \neq -4\frac{1}{2}$) a $z' = 2 + y'$ a úpravou převedeme zadanou rovnici na rovnici $(2z + 9)z' = 5z + 20$, která má stacionární řešení $z = -4$. Po integraci $2z+\ln(|z+4|) = 5x+c$, $c \in \mathbb{R}$.Pro $z \in (-\infty; -4) \setminus \{-4\frac{1}{2}\}$ je $2z+\ln(|z+4|) \in (-\infty; -9 - \ln 2)$, tedy $x \in (-\infty; -\frac{9}{5} - \frac{1}{5}\ln(2) - \frac{c}{5})$, pro $z \in (-4; +\infty)$ je $2z + \ln(|z + 4|) \in (-\infty; +\infty)$, a tedy $x \in (-\infty; +\infty)$. Po zpětné substituci $z = y + 2x$ dostaneme závěrečný implicitní vztah $2y + \ln(|y + 2x + 4|) = x + c$, $c \in \mathbb{R}$, který určuje řešení na intervalech $x \in (-\infty; -\frac{9}{5} - \frac{1}{5}\ln 2 - \frac{c}{5})$ a $x \in (-\infty; +\infty)$, a řešení $y(x) = -2x - 4$ pro $x \in \mathbb{R}$. Vyloučenému bodu $x = -\frac{9}{5} - \frac{1}{5}\ln 2 - \frac{c}{5}$ odpovídá vyloučená hodnota $y = -\frac{9}{10} + \frac{2}{5}\ln 2 + \frac{2c}{5}$, jež leží na vyloučené přímce $4x + 2y = -9$, tedy řešení nelze prodloužit. Nalezli jsme tedy maximální řešení.

70) Řešíme na množině $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x+2y+1 \neq 0\}$. Substitucí $z = x+2y$ a $z' = 1+2y'$ převedeme zadanou rovnici na rovnici $z' - 1 = \frac{4-z}{1+z}$ pro $z \neq -1$. Po itegraci $z + \frac{1}{2}z^2 = 5x + c$, $c \in \mathbb{R}$. Odtud $z = -1 \pm \sqrt{1 + 2c + 10x}$. Po zpětné substutici $y = \frac{1}{2}(z - x)$ dostaneme závěr:

$$y(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 + 2c + 10x}, x \in (-\frac{2c+1}{10}; +\infty), c \in \mathbb{R}$$

71) Řešíme na množině $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 4y-2x+6 \neq 0\}$. Substitucí $z = 2y-x$ a $z' = 2y' - 1$ převedeme zadanou rovnici na rovnici $z' + 1 = \frac{z+1}{z+3}$ pro $z \neq -3$. Po itegraci $\frac{1}{2}z^2 + 3z = -2x + c$, $c \in \mathbb{R}$. Odtud $z + 3 = \pm\sqrt{9 + 2c - 4x}$. Po zpětné substutici $y = \frac{1}{2}(z + x)$ dostaneme závěr:

$$y(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{9 + 2c - 4x}, x \in (-\infty; \frac{2c+9}{4}), c \in \mathbb{R}$$

72) Řešíme na množině $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x - y + 3 \neq 0\}$. Substitucí $x = X - 2$ a $y = Y + 1$ převedeme zadanou rovnici na homogenní rovnici $Y' = \frac{X+Y}{X-Y}$ pro $Y \neq X$. Použijeme substituci $Y = X \cdot z$ ($z \neq 1$). Po úpravě přejde rovnice do tvaru $z'\frac{1-z}{1+z^2} = \frac{1}{X}$. Po integraci dostaneme $\operatorname{arctg}(z) - \frac{1}{2}\ln(1+z^2) = \ln(|X|)+c$, $c \in \mathbb{R}$. Tento vztah lze splnit jen pro $\ln(|X|) \in (-\infty; \frac{\pi}{4} - \ln(\sqrt{2}) - c)$. Po zpětné substituci $z = \frac{Y}{X}$ a $X = x + 2$ a $Y = y - 1$ dostaneme závěrečný implicitní vztah $\operatorname{arctg}(\frac{y-1}{x+2}) - \ln(\sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2}) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Tento vztah určuje řešení pro $x \in (-2 - \frac{\exp(\frac{\pi}{4}-c)}{\sqrt{2}}; -2)$ a pro $x \in (-2; -2 + \frac{\exp(\frac{\pi}{4}-c)}{\sqrt{2}})$. V bodě $x = -2$ dostáváme ze vztahu $\operatorname{arctg}(z) - \frac{1}{2}\ln(1+z^2) = \ln(|X|) + c$, že pro $X \to 0$ je $z \to \pm\infty$, a tedy ze vztahu $\operatorname{arctg}(z) - \ln(\sqrt{X^2+Y^2}) = c$ dostáváme $|Y| \to e^{\pm\frac{\pi}{2}-c}$, tedy řešení určené konstantou c_1 definované na intervalu $(-2 - \frac{\exp(\frac{\pi}{4}-c_1)}{\sqrt{2}}; -2)$ lze v bodě $x = -2$ spojit hodnotou $y = \pm e^{-\frac{\pi}{2}-c_1} = \pm e^{\frac{\pi}{2}-c_2}$, resp. $y = \pm e^{\frac{\pi}{2}-c_1} = \pm e^{-\frac{\pi}{2}-c_2}$ s řešením určeným konstantou c_2 definovaným na intervalu $(-2; -2 + \frac{\exp(\frac{\pi}{4}-c_2)}{\sqrt{2}})$, pokud $c_1 + \pi = c_2$, resp. $c_1 - \pi = c_2$. Dostáváme tak maximální řešení definovaná na intervalech $(-2 - \frac{\exp(\frac{\pi}{4}-c_1)}{\sqrt{2}}; -2 + \frac{\exp(\frac{\pi}{4}-c_2)}{\sqrt{2}})$ pro $c_1 \pm \pi = c_2$.