Rovnice typu $y' = \frac{ay+bx+c}{dy+ex+f}$

Rovnice typu
$$y' = \frac{ay + bx + c}{dy + ex + f}$$
lze převést na homogenní rovnice substitucí $X := x + A$, $Y(X) := y(x) + B$ pro vhodná čísla A a B, jak ukazuje následující příklad.

Příklad 6. Najděte všechna maximální řešení diferenciální rovnice
$$y' = \frac{2x - y + 1}{x - 2y + 1}.$$

Řešení. Substitucí $Y(X) = y(x) + B$, $X = x + A$ získáváme
$$Y'(X) = y'(x) = \frac{2x - y(x) + 1}{x - 2y(x) + 1} = \frac{2X - 2A - Y(X) + B + 1}{X - A - 2Y(X) + 2B + 1} = \frac{2X - Y(X)}{X - 2Y(X)},$$
kde poslední nerovnost platí, pokud $-2A + B + 1 = 0$ a $-A + 2B + 1 = 0$, tj. $A = 1/3$, $B = -1/3$.

Rovnice
$$Y' = \frac{2X - Y}{X - 2Y}$$
už je homogenní, řešíme ji tedy substitucí $Y = X \cdot Z$, tj. převedením na
$$Z' = 2\frac{Z^2 - Z + 1}{1 - 2Z} \cdot \frac{1}{X}.$$
Pro $X \in (-\infty, 0)$, resp. $(0, +\infty)$ a $Z \in (-\infty, 1/2)$, resp. $(1/2, +\infty)$ integrací dostaneme
$$\ln(Z^2 - Z + 1) = -2\ln|X| + C.$$
Funkce na levé straně zobrazuje každý z intervalů $(-\infty, 1/2)$, $(1/2, +\infty)$ na interval $(\ln(3/4), +\infty)$, tj.
$$-2\ln|X| + C > \ln(3/4).$$
Odtud
$$\ln(|X|e^{-C/2}) = \ln|X| - \frac{C}{2} < \ln(3/4)^{-1/2} = \ln(2/\sqrt{3})$$
a
$$X \in \left(0, \frac{2e^{C/2}}{\sqrt{3}}\right), \quad \text{resp.} \quad X \in \left(-\frac{2e^{C/2}}{\sqrt{3}}, 0\right).$$
Ze vztahu mezi X a Z dostáváme
$$Z^2 - Z + 1 - e^C X^{-2} = 0,$$

tj.

$$Z = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{4e^C X^{-2} - 3}).$$

Dosazením do substituce máme

$$Y(X) = \frac{1}{2}(X \pm X\sqrt{4e^C X^{-2} - 3}) = \frac{1}{2}(X \pm \sqrt{4e^C - 3X^2})$$

a vidíme, že toto řešení lze dodefinovat v 0 a v bodě 0 bude rovněž vyhovovat rovnici. Dále tedy

$$y(x) = \frac{1}{2}\left(x + 1 \pm \sqrt{4e^C - 3(x + 1/3)^2}\right)$$

na intervalu

$$x \in \left(-\frac{2e^{C/2}}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}, \frac{2e^{C/2}}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\right).$$

Tento interval je maximální, protože v jeho krajních bodech je $y = 1/2(x+1)$ a pravá strana rovnice není definována. Nalezli jsme všechna řešení, protože každým bodem roviny kromě bodů $x + 1 - 2y = 0$ prochází nějaké řešení:

$$4e^C = \left(y_0 - \frac{x_0 + 1}{2}\right)^2 + 3\left(x_0 + \frac{1}{3}\right)^2$$

a protože výraz na pravé straně je kladný (nulový je jen v případě $x_0 = -1/3$, $y_0 = 1/3$, což ovšem leží na vyloučené přímce), existuje C splňující tuto rovnici.